Transparent à intercaler entre les transparents 21 et 22

Comparaison de deux proportions.
Groupes appareillés

Deux groupes appareillés : la même variable dichotomique a été utilisée pour tester un groupe de sujets dans deux conditions A_1 et A_2.
Résultats résumés par le tableau de contingence :

		A_1	
		Réussite	Echec
A_2	Réussite	a	c
	Echec	b	d

L'information utile est alors fournie par les effectifs "de discordance" b et c.

Notations
p_1 : fréquence de la combinaison (réussite en A_1, échec en A_2) par rapport à la discordance totale dans la population.
p_2 : fréquence de la combinaison (échec en A_1, réussite en A_2) par rapport à la discordance totale dans la population.

Hypothèses du test
$H_0 : p_1 = p_2 (= 50\%)$
H_1 : choisir entre : $p_1 \neq p_2$ ou $p_1 < p_2$ ou $p_1 > p_2$

Statistique de test

$$Z = \frac{b - c}{\sqrt{b + c}}$$

Si $b + c > 30$, Z suit la loi normale centrée réduite.

Transparent à intercaler entre les transparents 21 et 22

Pour un test bilatéral, on peut aussi utiliser comme statistique de test le χ^2 de Mac Nemar :

$$\chi^2 = \frac{(b-c)^2}{b+c}, \quad ddl = 1$$

ou, avec la correction de Yates (petits effectifs) :

$$\chi^2 = \frac{(|b-c|-1)^2}{b+c}, \quad ddl = 1$$

Exemple

Test de la mémoire à 2 semaines et à un an.

		2 semaines Reconnu	2 semaines Non reconnu	Total
Un an	Reconnu	81	8	89
	Non reconnu	46	49	95
	Total	127	57	184

$$z_{obs} = \frac{46-8}{\sqrt{46+8}} = 5.17$$

Pour un test unilatéral (Reconnaissance à 1 an < Reconnaissance à 2 semaines), $z_{crit} = 1.645$. La différence est significative.

Test de Wilcoxon-Mann-Whitney
Test U de Mann-Whitney

Deux groupes indépendants : deux échantillons tirés de deux populations distinctes.

Variable dépendante : ordinale ou numérique (par exemple, numérique comportant un très grand nombre de modalités).

Construction du protocole des rangs

On classe les n_1+n_2 sujets par valeurs croissantes (par exemple) de la variable. On attribue un rang à chaque sujet, avec la convention du rang moyen pour les ex æquos.

Hypothèses

H_0 : les rangs sont distribués de la même façon dans les deux groupes (ou: les individus des deux populations parentes s'interclassent de manière homogène).

H_1 : Selon l'hypothèse de recherche, l'une des trois formes suivantes.

H_1 bilatérale: Les deux classements sont différents.

H_1 unilatérale "à gauche" : Les individus du premier groupe. apparaissent plus fréquemment dans les rangs les moins élevés.

H_1 unilatérale “à droite” : Les individus du premier groupe apparaissent plus fréquemment dans les rangs les plus élevés.

Construction de la statistique de test

• n_1 *et* n_2 *petits : utilisation de tables*

On calcule la somme des rangs du plus petit des deux échantillons : W

On compare W aux valeurs critiques W_s ou W'_s fournies par la table.

• $n_1 \geq 10$ *et* $n_2 \geq 10$ *: approximation par une loi normale*

$\overline{R_1}$: moyenne des rangs observés sur le premier échantillon

$\overline{R_2}$: moyenne des rangs observés sur le deuxième échantillon

$$Z = \frac{\overline{R_1} - \overline{R_2}}{E} \ avec \ E^2 = \frac{(n_1 + n_2 + 1)\,(n_1 + n_2)^2}{12 n_1 n_2}$$

Z suit une loi normale centrée réduite.

Test du signe

Un échantillon de sujets, placés dans deux conditions expérimentales différentes : groupes appareillés.

Variable dépendante : ordinale ou numérique.

– protocole du signe des différences individuelles
– on élimine les différences nulles

D_+ : nombre de différences positives
D_- : nombre de différences négatives
$N = D_+ + D_-$: nombre total d'observations après élimination des différences nulles.

Hypothèses du test :

H_0 : les différences sont dues au hasard : dans la population parente, la fréquence des différences positives est 50%.

H_1 : Cette fréquence n'est pas 50% (test bilatéral)
ou (tests unilatéraux)
Cette fréquence est inférieure à 50%
Cette fréquence est supérieure à 50%

• *Cas des petits échantillons ($N \leq 30$)*

Sous H_0, la variable statistique “nombre de sujets présentant une différence positive sur un échantillon de taille N” suit une *loi binomiale de paramètres N et 0.5*.

On raisonne en termes de “niveau de significativité”.

Par exemple, dans le cas d'un test unilatéral tel que
H_1 : fréquence inférieure à 50%
on calcule la fréquence cumulée $P(X \leq D_+)$ de D_+ pour la loi binomiale $B(N, 0.5)$.
Pour un seuil α donné :
Si $P(X \leq D_+) < \alpha$ on retient H_1
Si $P(X \leq D_+) \geq \alpha$ on retient H_0

• *Cas des grands échantillons : approximation par une loi normale ($N > 30$)*

$D = \max(D_+, D_-)$

$$Z = \frac{2D - 1 - N}{\sqrt{N}}$$

Z suit une loi normale centrée réduite.

Remarque. Dans le cas d'un test unilatéral, la zone de rejet est toujours située “à droite”.

Test de Wilcoxon sur des groupes appareillés
Test T, ou test des rangs signés

Un échantillon de sujets, placés dans deux conditions expérimentales différentes : groupes appareillés.

Variable dépendante : numérique.

On construit :

– le protocole des effets individuels d_i
– le protocole des valeurs absolues de ces effets $|d_i|$
– le protocole des rangs appliqués aux valeurs absolues, en éliminant les valeurs nulles.

T_+ : somme des rangs des observations tq $d_i > 0$
T_- : somme des rangs des observations tq $d_i < 0$
N = nombre de différences non nulles
$T_m = \min(T_+, T_-)$;
$T_M = \max(T_+, T_-)$

Hypothèses

H_0 : Dans la population parente, les effets individuels positifs et les effets individuels négatifs s'interclassent de manière homogène

H_1 : Les deux classements sont différents (test bilatéral) ou les effets individuels positifs apparaissent plus fréquemment dans les rangs les moins élevés (resp. les plus élevés) (test unilatéral).

Statistique de test

• *Cas des petits échantillons*
$N \leq 15$: *utilisation de tables spécialisées*

On compare T_m aux valeurs critiques indiquées par la table.

• *Cas des grands échantillons*
$N > 15$: *approximation par une loi normale*

$$Z = \frac{T_M - 0,5 - \frac{N(N+1)}{4}}{E}$$

avec

$$E^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{24}$$

Z suit une loi normale centrée réduite.