

Tests d'égalité de moyennes, de fréquences

Exercice 21 Dossier "Plpc", "Plpc-cor"

Dans une recherche de psychologie, on a présenté à chaque sujet des photographies de chiens, de diverses races, pour moitié à poils courts et pour moitié à poils longs. Chaque sujet évalue le chien présenté en cochant l'une des 6 cases d'une échelle d'attirance. Les évaluations ont été codées numériquement de 0 (faible attirance) à 5 (forte attirance). Dans le tableau ci-dessous, on donne pour chacun des 16 sujets les deux valeurs moyennes des évaluations concernant les deux types de chiens.

	s1	s2	s3	s4	s5	s6	s7	s8
Poils longs	3,50	2,75	3,50	2,75	1,50	3,00	4,00	3,00
Poils courts	2,50	1,25	2,75	0,50	2,00	3,00	2,00	2,00
	s9	s10	s11	s12	s13	s14	s15	s16
Poils longs	2,75	3,25	4,00	3,00	3,75	4,00	4,00	3,25
Poils courts	2,50	0,75	0,50	1,00	1,50	1,75	2,00	2,00

Un *effet individuel* est défini comme la différence entre les deux notes concernant un même sujet. Construire le protocole des effets individuels.

Peut-on affirmer, au seuil de 5%, que les chiens à poils longs sont préférés à ceux à poils courts.

Remarque. La variable statistique de départ (classement sur une échelle d'attirance) est en fait ordinale et non numérique. Nous reprendrons cet exemple avec d'autres outils dans un chapitre ultérieur.

Réponses: Le protocole des effets individuels a pour moyenne $\bar{d} = 1,5$ et pour écart type corrigé $s_c = 1,0448$. On obtient $t_{obs} = 5,74$. La différence est significative au seuil de 5%.

Exercice 22 Dossier "Internat"

Pour une recherche internationale sur l'évaluation des savoir-faire en situation de vie quotidienne, on a construit un test comportant une version en français et une version en anglais. Pour s'assurer de l'équivalence des deux instruments, on administre les deux versions du test à un groupe de 24 paires de sujets, chaque paire comprenant un sujet de langue maternelle anglaise et un sujet de langue maternelle française. Pour constituer les paires, les sujets sont appariés sur un ensemble de variables permettant de s'assurer de l'équivalence de leur efficacité. Le plan du protocole est P24*T2.

On cherche à répondre à la question "les sujets obtiennent-ils le même résultat au test en anglais (t_1) et au test en français (t_2)".

Sujet	t_1	t_2	Sujet	t_1	t_2	Sujet	t_1	t_2
S1	27.0	25.5	S9	27.0	28.5	S17	21.5	20.5
S2	23.0	23.5	S10	28.5	26.0	S18	19.5	23.5
S3	21.5	18.5	S11	26.5	23.0	S19	23.5	23.0
S4	24.0	22.0	S12	24.0	24.5	S20	21.0	24.0
S5	22.5	28.0	S13	26.0	23.5	S21	23.0	24.0
S6	24.0	19.0	S14	21.5	22.0	S22	20.0	20.5
S7	21.5	19.0	S15	26.5	22.0	S23	20.0	17.5
S8	22.0	25.5	S16	20.0	16.0	S24	21.0	16.0

Réponses: On introduit le protocole des différences individuelles D défini par: $d_i = t_{i2} - t_{i1}$. On a: $\bar{d} = -0.8125$, $s_c = 2.9185$. $t_{obs} = -1.36386$. Ici, $ddl = 23$ et donc, au seuil de 5% bilatéral, $t_{crit} = 2.07$. On ne peut donc pas rejeter l'hypothèse nulle

Exercice 23 Dossier "Manage"

Dans une étude de psychologie du travail, on cherche à déterminer l'influence de deux conceptions managériales, l'une "hiérarchique (H), l'autre "démocratique (D) sur la sécurité dans l'entreprise. A cet effet, on prélève au hasard, dans un vaste ensemble de données, quinze intervalles trimestriels pour lesquels on relève ensuite le nombre d'incidents qui se sont produits sur chacun des sites, par ailleurs comparables à tous égards. Les données résultant des tirages aléatoires sont les suivantes :

Trim.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Conc. H	11	11	14	21	12	10	15	15	17	9	12	12	15	12	11
Conc. D	8	13	12	17	14	9	10	12	13	10	8	13	12	9	9

- 1) Calculer la moyenne et l'écart type de chacun des deux échantillons proposés. A partir de ces éléments, formuler une conclusion descriptive concernant le problème posé.
- 2) Les données observées définissent-elles des échantillons indépendants ou appariés?
- 3) Réaliser un test statistique approprié en précisant avec soin l'hypothèse nulle et l'hypothèse alternative, la statistique de test utilisée, la loi suivie par cette statistique et le seuil choisi.

Réponses: 1) $\bar{x}_1 = 13.33$, $\bar{x}_2 = 11.27$, $s_{1c} = 3.09$, $s_{2c} = 2.55$. 3) $\bar{d} = 1.87$. $s_c = 2.33$. $t_{obs} = 3.10$. La différence est significative au seuil de 1% (test bilatéral).

Exercice 24 Dossier "Usine"

Dans une usine, on cherche à voir si un changement de l'environnement (musique dans les ateliers en particulier) peut modifier le rendement. Ce dernier est mesuré ici par le nombre moyen de pièces produites à l'heure par chaque ouvrier.

- 1) On note pour chacun des 33 ouvriers observés, son rendement avant et après l'introduction de ces changements. Les résultats sont les suivants.

Avant	Après	Avant	Après	Avant	Après
45	48	30	35	40	45
36	40	45	50	40	35
47	53	30	40	38	35
40	40	45	50	35	40
45	46	40	45	40	45
35	30	50	50	35	37
36	40	40	40	38	35
50	60	50	45	50	50
50	60	40	35	45	50
40	40	55	50	30	33
40	40	30	35	38	38

Effectuer les calculs permettant de répondre à la question posée et conclure.

- 2) On suppose maintenant que les données ci-dessus concernent deux groupes d'ouvriers distincts, les premiers (colonne "Avant ") placés dans un environnement ordinaire, les seconds (colonne "Après ") placés dans un environnement modifié. Quels sont alors les calculs à effectuer et quelle est alors la conclusion?

Réponses : 1) $\bar{d} = 2.03$, $s_c = 4.41$. $z_{obs} = 2.64$. La différence est significative pour un test unilatéral au seuil de 1%.

2) $\bar{x}_1 = 40.85$, $\bar{x}_2 = 42.88$, $s_{1c} = 6.60$, $s_{2c} = 7.52$, $z_{obs} = 1.17$. Dans le cas d'un test unilatéral au seuil de 5%, on ne peut refuser H_0 .

Exercice 25 Dossier "pedago"

Lors d'une expérience pédagogique, on s'intéresse à l'effet comparé de deux pédagogies des mathématiques chez deux groupes de 10 sujets:

- pédagogie traditionnelle (p_1)
- pédagogie moderne (p_2)

On note la performance à une épreuve de combinatoire.

p_1 traditionnelle		p_2 moderne	
s1	5.0	s11	4.0
s2	4.0	s12	5.5
s3	1.5	s13	4.5
s4	6.0	s14	6.5
s5	3.0	s15	4.5
s6	3.5	s16	5.5
s7	3.0	s17	1.0
s8	2.5	s18	2.0
s9	1.5	s19	4.5
s10	2.5	s20	4.5

1) Vérifier que les paramètres des deux échantillons sont donnés par:

	p_1	p_2
Moyenne	3.250	4.250
Ecart-type	1.365	1.553
Variance	1.863	2.413
Ecart-type corrigé	1.439	1.637
Variance corrigée	2.069	2.681

2) Ces données expérimentales permettent-elles d'affirmer que la pédagogie a un effet sur les résultats à l'épreuve de combinatoire?

Réponse : $t_{obs} = -1.45$. Dans le cas d'un test unilatéral au seuil de 5%, on ne peut refuser H_0 .

Exercice 26

On veut savoir si une maladie M modifie le taux de certaines protéines dans le sang. On a mesuré leur concentration dans un échantillon de sujets atteints par M et dans un autre échantillon formé de sujets en bonne santé (sujets témoins). Les résultats (dans une unité convenable) sont les suivants:

	Effectifs	Moyenne échantillon	Variance échantillon
Malades	77	141	40
Témoins	33	131	32

Tester l'hypothèse "taux identiques chez les malades et les témoins" contre l'hypothèse:

- a) "taux différent chez les malades et les témoins",
 b) "taux supérieur chez les malades".

Réponses: $z_{obs} = 8.094$. Dans les deux cas, H_0 est refusée.

Exercice 27

Dans une étude publiée en 1996, les auteurs se sont intéressés au rôle de la valeur affective d'un texte dans la récupération du souvenir chez les personnes âgées. L'expérience a porté sur 20 sujets; 10 d'entre eux présentent un déficit mnésique, les 10 autres n'en présentent pas.

Dans un premier temps, on veut s'assurer que les deux groupes ainsi constitués :

- d'une part, sont homogènes du point de vue de l'âge
- d'autre part obtiennent des scores significativement différents au test "Wescher Mémoire".

Les données relatives aux sujets des deux groupes figurent dans les tableaux ci-dessous.

Sujets déficitaires			Sujets non déficitaires		
	Age	Wescher Mémoire		Age	Wescher Mémoire
Sujet 1	80	66	Sujet 11	80	113
Sujet 2	91	59	Sujet 12	81	94
Sujet 3	82	84	Sujet 13	82	87
Sujet 4	87	68	Sujet 14	84	98
Sujet 5	82	80	Sujet 15	85	103
Sujet 6	85	75	Sujet 16	85	110
Sujet 7	84	72	Sujet 17	86	97
Sujet 8	85	82	Sujet 18	89	119
Sujet 9	88	78	Sujet 19	91	88
Sujet 10	87	76	Sujet 20	92	91

1) Calculer la moyenne et l'écart type des variables âge et Weschler mémoire pour chacun des deux groupes.

2) Comparer les deux groupes du point de vue de l'âge à l'aide d'un test de comparaison de moyennes.

3) De même, comparer les deux groupes du point de vue de la seconde variable.

Réponses: 1) Pour la variable âge: $\bar{x}_1 = 85.1$, $\bar{x}_2 = 85.5$, $s_1 = 3.11$, $s_2 = 3.88$. Pour la seconde variable, $\bar{x}'_1 = 74$, $\bar{x}'_2 = 100$, $s'_1 = 7.42$, $s'_2 = 10.40$.

2) On réalise un test de comparaison de moyennes sur deux groupes indépendants. Compte tenu de la taille des échantillons, c'est la loi de Student qui s'applique. Ici, $n_1 = n_2 = 10$ (groupes équilibrés); $ddl = 18$. Au seuil de 5% unilatéral, $t_{crit} = 1.7341$. On obtient ici $t_{obs} = 0.24$. On retient donc H_0 et on conclut à l'homogénéité des âges dans les deux groupes.

3) Test analogue au précédent. On obtient ici $t_{obs} = 6.10$, ce qui est significatif d'une différence aux seuils traditionnels.

Exercice 28

Le modèle de la mémorisation proposé par Craik et Lockhart (1972) stipule que le degré auquel un sujet se rappelle un matériel verbal est fonction du degré auquel ce matériel a été traité lors de sa présentation initiale. Eysenck (1974) voulait tester ce modèle et examiner s'il pouvait contribuer à expliquer certaines différences relevées entre des sujets

jeunes et âgés concernant leur aptitude à se rappeler du matériel verbal. L'étude qu'il a menée incluait 50 sujets dont l'âge se situait entre 18 et 30 ans et 50 sujets compris dans la tranche d'âge 55–65 ans. Dans chacune des tranches d'âge, Eysenck a réparti les 50 sujets dans cinq groupes. Le premier devait lire une liste de mots et se contenter de compter le nombre de lettres de chacun d'eux. Le deuxième groupe devait lire chaque mot et lui trouver une rime. Le troisième groupe devait donner un adjectif qui aurait pu être utilisé pour modifier chaque mot de la liste. Le quatrième devait essayer de se former une image précise de chaque mot. Aucun de ces quatre groupes ne savait qu'il faudrait se rappeler les mots ultérieurement. Enfin, le cinquième groupe, ou groupe d'apprentissage intentionnel, devait lire la liste et mémoriser tous les mots. Après avoir passé trois fois en revue la liste de 27 mots, les sujets devaient retranscrire tous les mots dont ils se souvenaient. Le nombre de mots rappelés par chacun des 100 sujets est indiqué par le tableau 1 page 15.

	Gr. 1	Gr. 2	Gr. 3	Gr. 4	Gr. 5
Sujets âgés	9	7	11	12	10
	8	9	13	11	19
	6	6	8	16	14
	8	6	6	11	5
	10	6	14	9	10
	4	11	11	23	11
	6	6	13	12	14
	5	3	13	10	15
	7	8	10	19	11
	7	7	11	11	11
Sujets jeunes	8	10	14	20	21
	6	7	11	16	19
	4	8	18	16	17
	6	10	14	15	15
	7	4	13	18	22
	6	7	22	16	16
	5	10	17	20	22
	7	6	16	22	22
	9	7	12	14	18
	7	7	11	19	21

Tableau 1: Données Eysenck

1) On veut étudier chez les sujets âgés s'il existe une différence de performance entre le groupe 2 (traitement syntaxique) et le groupe 3 (traitement sémantique), en faveur de ce dernier. Le calcul permet d'obtenir les résultats de statistiques descriptives suivants :

	Groupe 2	Groupe 3
Moyenne	6.9	11.0
Effectif	10	10
Ecart-type	2.02	2.37
Ecart-type corrigé	2.13	2.49

2) Etudier de même s'il existe une différence de performance due à l'âge parmi les sujets du groupe 2.

Réponses: 1) Il s'agit d'une comparaison de moyennes sur deux groupes indépendants. Avec les données fournies, on obtient $t_{obs} = -3.80$ alors que, pour un test bilatéral au seuil de 5%, on obtient $t_{crit} = 2.10$ ($ddl = 18$). Il existe donc une différence significative entre le traitement syntaxique et le traitement sémantique.

2) Les sujets du groupe 2 forment deux sous-groupes indépendants du point de vue de l'âge. On obtient $t_{obs} = -0.766$. La différence de performance n'est pas significative dans ce cas.

Exercice 29

Un psychologue s'intéresse à la relation entre le sexe (variable X), le statut socio-économique (variable C) et le "locus of control" perçu. Il a pris huit adultes de chaque combinaison sexe-statut socio-économique et leur a administré une échelle portant sur le "locus of control" ; un score élevé indique que le sujet estime contrôler sa vie quotidienne. Les données observées sont rassemblées dans le tableau 2 page 16.

	statut socio-économique		
	Bas	Moyen	Elevé
Hommes	10	16	18
	12	12	14
	8	19	17
	14	17	13
	10	15	19
	16	11	15
	15	14	22
	13	10	20
Femmes	8	14	12
	10	10	18
	7	13	14
	9	9	21
	12	17	19
	5	15	17
	8	12	13
	7	8	16

Tableau 2: Données "locus of control"

On veut étudier, pour les sujets de statut socio-économique moyen, s'il existe une différence de "locus of control" entre les hommes et les femmes.

Réaliser un test de comparaison de moyennes permettant d'apporter une réponse à la question posée (seuil choisi: 5%).

Réponse: Il s'agit d'une comparaison de deux moyennes sur des groupes indépendants. On obtient: $t_{obs} = 1.29$, avec 14 ddl. Pour un test unilatéral au seuil de 5%, $t_{crit} = 1.76$. On conclut donc à une différence selon les sexes.

Exercice 30 Dossier "coaction"

Au cours d'une expérience étudiant l'effet de la coaction sur l'apprentissage, on présente

au sujet une liste de syllabes sans signification et on note le nombre d'essais nécessaires à sa mémorisation. Le sujet travaille soit seul, soit en présence d'un autre sujet effectuant la même tâche que lui. On fait l'hypothèse que les sujets n'apprendront pas aussi vite dans les deux conditions. Les résultats obtenus sur 30 sujets travaillant seuls et 30 sujets travaillant en condition de coaction sont les suivants:

	Seuls	En coaction
Moyenne	5,6	7,5
Ecart type	1,09	1,64

Effectuer les calculs permettant de tester l'hypothèse formulée et conclure.

Réponses: En supposant que l'énoncé nous donne des écarts types corrigés, on obtient $t_{obs} = -5.28$. Au seuil de 1%, les résultats sont significatifs d'une différence entre les deux groupes.

Exercice 31 *N.B. Les trois questions sont indépendantes*

Nurcombe et al. ont mené en 1984 une étude sur les enfants présentant un poids réduit à la naissance (PRN). Ces enfants posent des problèmes particuliers à leurs parents parce qu'ils sont, en apparence, apathiques et imprévisibles; en outre, ils risquent de connaître des problèmes physiques et comportementaux. L'étude a porté sur trois groupes d'enfants;

- Un groupe expérimental de 25 enfants PRN dont les mères bénéficiaient d'un apprentissage particulier: elles étaient sensibilisées aux signaux émis par ces enfants, afin de leur permettre de mieux répondre à leurs besoins;
- Un groupe témoin de 31 enfants PRN dont les mères ne bénéficiaient d'aucun programme particulier;
- Un groupe d'enfants dont le poids à la naissance était normal.

Le tableau 3 page 19 représente une partie des données, saisies dans la plage A1:F33 d'une feuille Excel. Il indique d'une part, l'indice de développement mental (IDM) à 6 mois et à 24 mois pour le groupe témoin PRN, ainsi que la différence entre les deux indices et d'autre part l'IDM à 24 mois pour le groupe expérimental PRN.

Les tableaux 4 page 20 et 5 page 20 indiquent les formules utilisées sous Excel pour calculer les paramètres descriptifs indiqués dans la zone B34:F38 de la feuille.

- 1) Des travaux antérieurs sur de tels enfants laissent penser que les scores IDM des enfants PRN du groupe témoin pouvaient diminuer de façon sensible entre 6 et 24 mois. Réaliser un test de comparaison de moyennes afin de déterminer si les données observées confirment cette hypothèse (choisir un seuil de 5%).
- 2) Le programme de formation proposé est-il efficace? Apporter une réponse à cette question en procédant à un autre test de comparaison de moyennes. Choisir de même un seuil de 5%.
- 3) Peu satisfait du résultat obtenu à la question 1, un chercheur souhaite comparer les données relatives aux enfants du groupe témoin PRN à l'aide d'un test du signe. Réaliser le test et conclure.

1) Soit μ_6 et μ_{24} les moyennes de l'IDM à 6 mois et à 24 mois dans la population dont est issu l'échantillon. L'hypothèse de recherche se traduit par les hypothèses statistiques suivantes :

$$H_0 : \mu_6 = \mu_{24}$$

$$H_1 : \mu_6 > \mu_{24}$$

Il s'agit d'un test de comparaison de moyennes sur des groupes appariés. La statistique de test est $t = \frac{\bar{d}}{E}$ avec $E^2 = \frac{s_c^2}{n}$. Compte tenu de l'effectif ($n = 31$), on peut utiliser ici une loi de Student avec 30 ddl ou une loi normale. Pour un seuil de 5% (et un test unilatéral avec la zone de rejet "à gauche"), on obtient $t_{crit} = -1.70$ (ou $z_{crit} = -1.65$). En utilisant les valeurs des cellules D34 et D35 du tableau Excel fourni, on obtient : $E^2 = \frac{257.21}{31} = 8.30$; $E = \sqrt{8.30} = 2.88$; $t_{obs} = \frac{-4.29}{2.88} = -1.49$. L'hypothèse H_0 est donc retenue : l'hypothèse d'une baisse de l'IDM n'a pas été démontrée.

2) Il s'agit maintenant d'une comparaison de moyennes sur deux groupes indépendants. On utilise la méthode adaptée aux petits échantillons (car $n' = 25$). On a :

$$H_0 : \mu = \mu'$$

$$H_1 : \mu < \mu'$$

La statistique de test suit une loi de Student avec 54 ddl. Pour un seuil de 5% (et un test unilatéral), on obtient $t_{crit} = -1.67$.

En utilisant les valeurs des cellules C34, F34, C36 et F36, on obtient :

$E^2 = \frac{31 \times 162.40 + 25 \times 154.4}{54} \left(\frac{1}{31} + \frac{1}{25} \right) = 11.90$ d'où $E = 3.45$ et $t_{obs} = \frac{-10.49}{3.45} = -3.04$. Comme $t_{obs} < t_{crit}$, on en déduit que la différence entre les deux groupes est significative d'un effet du programme de formation, au bénéfice du groupe expérimental.

3) Les hypothèses statistiques s'expriment ici par :

H_0 : Autant de différences positives que de différences négatives dans la population.

H_1 : Dans la population parente, la fréquence des différences négatives est supérieure à 50%.

Comme $N > 30$, on peut utiliser l'approximation de la loi binomiale par une loi normale et prendre comme statistique de test : $Z = \frac{2D - 1 - N}{\sqrt{N}}$ où $D = \max(D_+, D_-)$. Pour un seuil de 5%, on obtient $z_{crit} = 1.65$. On a ici 12 différences positives pour 19 différences négatives, d'où : $z_{obs} = \frac{38 - 1 - 31}{\sqrt{31}} = 1.07$. On accepte donc l'hypothèse H_0 , ce qui confirme le résultat de la question 1.

	A	B	C	D	E	F
1	PRN Témoin				PRN expérimental	
2		IDM-6	IDM-24	Diff		IDM-24
3	s1	124	114	-10	s'1	96
4	s2	94	88	-6	s'2	127
5	s3	115	102	-13	s'3	127
6	s4	110	127	17	s'4	137
7	s5	116	104	-12	s'5	114
8	s6	139	104	-35	s'6	119
9	s7	116	91	-25	s'7	109
10	s8	110	96	-14	s'8	109
11	s9	129	104	-25	s'9	143
12	s10	120	106	-14	s'10	109
13	s11	105	91	-14	s'11	116
14	s12	88	102	14	s'12	114
15	s13	120	104	-16	s'13	143
16	s14	120	100	-20	s'14	109
17	s15	116	114	-2	s'15	117
18	s16	105	109	4	s'16	127
19	s17	100	109	9	s'17	112
20	s18	91	119	28	s'18	112
21	s19	129	91	-38	s'19	98
22	s20	84	81	-3	s'20	137
23	s21	91	114	23	s'21	112
24	s22	116	119	3	s'22	109
25	s23	100	102	2	s'23	119
26	s24	113	111	-2	s'24	106
27	s25	89	80	-9	s'25	109
28	s26	102	119	17		
29	s27	110	119	9		
30	s28	116	123	7		
31	s29	124	119	-5		
32	s30	126	114	-12		
33	s31	123	132	9		
34		111.00	106.71	-4.29		117.20
35		191.8667	167.8129	257.2129		160.8333
36		185.6774	162.3996	248.9157		154.4000
37		13.8516	12.9543	16.0379		12.6820
38		13.6264	12.7436	15.7771		12.4258

Tableau 3: Données PRN

	A	B	C	D
34		=MOYENNE(B3:B33)	=MOYENNE(C3:C33)	=MOYENNE(D3:D33)
35		=VAR(B3:B33)	=VAR(C3:C33)	=VAR(D3:D33)
36		=VAR.P(B3:B33)	=VAR.P(C3:C33)	=VAR.P(D3:D33)
37		=ECARTYPE(B3:B33)	=ECARTYPE(C3:C33)	=ECARTYPE(D3:D33)
38		=ECARTYPEP(B3:B33)	=ECARTYPEP(C3:C33)	=ECARTYPEP(D3:D33)

Tableau 4: Formules

	E	F
34		=MOYENNE(F3:F33)
35		=VAR(F3:F33)
36		=VAR.P(F3:F33)
37		=ECARTYPE(F3:F33)
38		=ECARTYPEP(F3:F33)

Tableau 5: Formules (suite)

Exercice 32 Un débat télévisé est organisé entre deux candidats à une élection. Un sondage fait auprès d'un échantillon de 200 électeurs a eu lieu avant le débat ; 95 électeurs déclaraient alors vouloir voter pour le candidat A.

Un autre sondage est effectué après le débat. Sur 150 électeurs interrogés, 84 déclarent alors vouloir voter pour le candidat A.

La proportion d'intentions de vote pour A a-t-elle été influencée par le débat ? Répondre à cette question à l'aide d'un test de comparaison de proportions au seuil de 5%.

Réponse. Il s'agit ici d'une comparaison de fréquences sur deux groupes indépendants. On trouve : $f_1 = 0.475$, $f_2 = 0.56$, $p = 0.5114$, d'où $E = 0.054$ et $z_{obs} = -1.57$. Au seuil de 5% pour un test unilatéral, on a : $z_{crit} = -1.645$. On n'a donc pas mis en évidence d'influence du débat sur les intentions de vote pour A.

Exercice 33

Un chercheur a étudié les souvenirs de professeurs d'université à l'égard de visages d'étudiants. Ces enseignants avaient côtoyé ces étudiants au cours de séances de travail en petits groupes pendant dix semaines. Deux semaines après, les enseignants devaient reconnaître les visages des étudiants à partir de photos mélangées avec des photos de visages qu'ils ne pouvaient avoir vu. Un an après, la même tâche était demandée. Les résultats détaillés sont les suivants :

		1 an		Total
		Reconnu	Non reconnu	
Deux semaines	Reconnu	81	46	127
	Non reconnu	8	49	57
	Total	89	95	184

Le chercheur fait l'hypothèse d'une baisse significative, au risque de 5% des taux de reconnaissance avec le temps. Les résultats observés confirment-ils cette hypothèse ?

Réponse. En utilisant un test de comparaison de proportions appariées, on obtient : $z_{obs} = \frac{46-8}{\sqrt{46+8}}$. Pour un test unilatéral (cf. l'hypothèse de recherche), on a $z_{crit} = 1.645$. L'hypothèse du chercheur est donc confirmée.

Exercice 34

Lors d'une enquête par questionnaire relative au traitement de la violence dans les établissements scolaires, un groupe de parents est interrogé avant et après la projection d'un film illustrant ce problème. Au total, 45 personnes ont fourni des réponses. On remarque que, avant la projection, 29 personnes pensaient que ces difficultés devaient être traitées en rendant plus sévère le règlement de l'établissement alors que les autres préconisaient des aides individualisées aux élèves concernés. Après la projection, on trouve 18 personnes qui préfèrent une solution de type réglementaire dont 14 avaient déjà cette opinion avant le film.

1) Dresser le tableau de contingence obtenu en croisant la condition (avant ou après la projection) et le type de solution préconisé.

2) L'opinion des sujets est-elle influencée par la projection du film ? Répondre à cette question à l'aide d'un test de comparaison de proportions appariées, puis à l'aide d'un test du χ^2 de Mac Nemar, au seuil de 5% (on suppose l'échantillon de taille suffisante pour pouvoir appliquer les méthodes envisagées).

Réponses. 1)

		Après Projection		Total
		Règlement	Aide	
Avant projection	Règlement	14	15	29
	Aide	4	12	16
Total		18	27	45

Méthode des proportions appariées: $Z = \frac{15-4}{\sqrt{15+4}} = 2.52$. Pour un test bilatéral au seuil de 5%, $z_{crit} = 1.96$. L'opinion des sujets est donc influencée par la projection du film.

Méthode du χ^2 de Mac Nemar (avec correction de Yates): $\chi_{obs}^2 = \frac{(15-4-1)^2}{15+4} = 5.26$, $ddl = 1$, $\chi_{crit}^2 = 3.84$, et la conclusion reste la même.

Exercice 35 Dossier "grsang"

En France, la fréquence du groupe sanguin A est $p_F = 0,45$.

1) Sur un échantillon de $n_S = 400$ Suédois on a trouvé 192 individus de groupe A. La fréquence du groupe sanguin A chez les Suédois diffère-t-elle de p_F ?

2) Sur un échantillon de 100 Ecossais, on a observé 32 individus de groupe A. Cette fréquence diffère-t-elle de celle observée chez les Suédois?

3) Le groupage sanguin trouvé pour les 400 Suédois est le suivant:

A : 192; B : 40; AB : 23; O : 145.

Diffère-t-il significativement du groupage théorique français:

A : 0,45; B : 0,08; AB : 0,03; O : 0,44.

4) Pour l'échantillon des 100 Ecossais la répartition des groupes est la suivante:

A : 32; B : 15; AB : 3; O : 50.

Les fréquences de ces groupes sont-elles différentes chez les Suédois et les Ecossais?

Réponses: 1) Comparaison d'une fréquence observée à une fréquence théorique. $z_{obs} = 1.20$. On ne peut pas refuser H_0 .

2) Comparaison de deux fréquences observées. $z_{obs} = 2.877$. On refuse H_0 au seuil de 5% dans le cas d'un test bilatéral.

3) Test de χ^2 de comparaison d'une distribution observée à une distribution théorique. $\chi_{obs}^2 = 18.34$, $ddl = 3$. On rejette H_0 au seuil de 5%.

4) Test du χ^2 sur un tableau de contingence. $\chi_{obs}^2 = 11.43$, $ddl = 3$. On rejette H_0 au seuil de 5%.

Tests non paramétriques

Exercice 36 Basket-Ball

On a relevé la taille de 31 garçons de 14 ans, entraînés aux épreuves de basket-ball. Les garçons sont répartis en deux groupes d'effectifs $n_1 = 12$ et $n_2 = 19$, selon le jugement porté par l'entraîneur (groupe g_1 : jugement positif; groupe g_2 : jugement négatif). Les données sont les suivantes :

g_1 : 188 184 178 178 177 177 176 174 173 164 163 152

g_2 : 195 193 189 189 188 186 181 181 180 179 179 177 176 176 174 174 172 171 167

1) Effectuer un test de la médiane visant à déterminer si le jugement porté par l'entraîneur est lié à la taille des sujets.

2) Reprendre les mêmes données et conclure à l'aide d'un test de Wilcoxon-Mann-Whitney.

Réponses: 1) La médiane générale vaut $M = 177$. On peut former le tableau de contin-

gence suivant :

	$\leq M$	$> M$	Total
$g1$	8	4	12
$g2$	8	11	19
Total	16	15	31

Après avoir formé le tableau des effectifs théoriques sous hypothèse d'indépendance des deux variables, on obtient : $\chi_{obs}^2 = 1.78$. Ici, $ddl = 1$, et on conclut à l'homogénéité des deux groupes au seuil de 5%.

2) Après construction du protocole des rangs, on obtient $\overline{R}_1 = 19.54$, $\overline{R}_2 = 13.76$ et $z_{obs} = 1.72$. Au seuil de 5%, l'hypothèse H_0 est acceptée dans le cas d'un test bilatéral. Il est difficile de conclure nettement dans le cas d'un test unilatéral.

Avec les notations de la table du test de Wilcoxon Mann Whitney, on a : $W = 234.5$ et, au seuil de 5 %, $W'_s = 234$. Comme précédemment, il est difficile de conclure nettement.

Exercice 37 Dossier "Psymot"

On dispose des résultats de deux groupes à une épreuve de psycho-motricité, l'un des groupes ayant reçu une éducation particulière. Ces deux groupes sont-ils comparables?

G1 : 38 34 18 45 5 1 21 22 11 7 52 24 93 17 56

G2 : 79 96 76 89 53 39 78 81 99 77 29 27.

Réponses : $\overline{R}_1 = 9.6$, $\overline{R}_2 = 19.5$ et $z_{obs} = -3.22$. Au seuil de 1%, on refuse l'hypothèse H_0 . C'est ici le groupe G2 qui a l'effectif le plus faible. Avec les notations de la table du test de Wilcoxon Mann Whitney, on a : $W = 234$ et, au seuil de 1 %, $W'_s = 216$. On refuse donc H_0 .

Exercice 38

Deux enseignants se sont partagé un lot de 20 copies. L'enseignant A a corrigé $n_1 = 8$ copies, l'enseignant B a corrigé $n_2 = 12$ copies, d'où deux groupes de copies. On range les 20 copies par ordre de mérite. Les résultats sont les suivants:

Correcteur A : 2 4 5 7 9 10 12 17

Correcteur B : 1 3 6 8 11 13 14 15 16 18 19 20.

1) Calculer la moyenne des rangs des copies notées par chacun des correcteurs. Quelle conclusion peut-on formuler au niveau descriptif?

2) A l'aide d'un test de Wilcoxon-Mann-Whitney, étudier si l'on peut conclure à l'hétérogénéité des deux groupes aux seuils traditionnels.

Réponses : 1) Noter que l'énoncé donne le protocole des rangs. On obtient : $\overline{R}_1 = 8.25$, $\overline{R}_2 = 12$ d'où, au niveau descriptif, une différence au bénéfice du correcteur B.

2) $z_{obs} = 1.39$. Résultat non significatif aux seuils traditionnels.

Avec les notations de la table du test de Wilcoxon Mann Whitney, on a : $N_1 = 8$, $N_2 = 12$, $W = 66$ et, au seuil de 5 %, $W'_s = 62$, $W'_s = 106$. On accepte donc H_0 .

Exercice 39

On reprend l'énoncé No 21 (chiens à poils longs, chiens à poils courts).

1) On recode les effets en ne retenant que leur signe (+ ou -). A partir du protocole obtenu, procéder au test du signe (N.B. Compte-tenu de la faible taille de l'échantillon, il faut utiliser ici une loi binomiale de paramètres $p = 0,5$ et $n = 15$).

2) Construire le protocole des rangs appliqué au protocole des effets individuels (différence des notes attribuées par un même sujet). L'observation correspondant à un effet nul ne sera pas prise en compte.

3) Procéder au test d'homogénéité des rangs de Wilcoxon.

Réponses : 1) $D_+ = 14$, $D_- = 1$, $N = 15$. Pour une variable X distribuée selon une loi

binomiale de paramètres $p = 0.5$ et $N = 15$, on a : $P(X \leq 1) = 0.00048$. Sous l'hypothèse H_0 , on a moins de 5 chances sur 10000 d'observer un échantillon aussi extrême. On accepte donc H_1 .

Test de Wilcoxon : $N = 15$, $T_+ = 118$, $T_- = 2$. D'après la table, on a, au seuil de 1%, $T_{m,crit} = 19$. On accepte donc H_1 . L'approximation par une loi normale conduit à $z_{obs} = 3.26$ et à la même conclusion.

Exercice 40

Dans une recherche médicale, on a examiné 15 patients atteints de la maladie de Parkinson, dans deux conditions: à jeun et sous médicament L-Dopa. Les résultats ont permis d'établir, pour la variable *Vitesse de la marche*, le protocole suivant des effets individuels.

Sujet	Effet	Sujet	Effet	Sujet	Effet
s1	+0,23	s6	+0,12	s11	+0,30
s2	+0,32	s7	+0,33	s12	+0,10
s3	+0,04	s8	+0,28	s13	-0,12
s4	+0,19	s9	0,00	s14	+0,15
s5	+0,22	s10	+0,12	s15	+0,09

Ordonner le protocole des effets individuels et construire le protocole des rangs. L'observation correspondant à un effet nul ne sera pas prise en compte.

Procéder à un test d'homogénéité des rangs de Wilcoxon et formuler une conclusion en termes d'effet du médicament.

Réponse : $T = T_+ = 100$. $Z = 2.95$. On accepte l'hypothèse alternative au seuil de 5% unilatéral.

Avec les notations de la table du test de Wilcoxon, on a : $N = 14$, $T_m = 5$. Or, au seuil de 5% unilatéral, $T_{m,crit} = 25$. La conclusion est identique.

Exercice 41

On veut comparer les résultats de deux classes de même niveau scolaire en utilisant une épreuve commune de performances linguistiques. On obtient, selon le barème adopté, les résultats suivants :

Classe A : 41, 49, 14, 81, 18, 54, 95, 13, 38, 15, 5, 17, 25, 96, 8.

Classe B : 80, 96, 86, 99, 89, 32, 7, 49, 98, 12, 67, 46, 26, 18, 80.

Effectuer un test de la médiane afin de déterminer si les deux classes obtiennent des résultats comparables.

Reprendre le problème à l'aide d'un test de Wilcoxon Mann Whitney.

Réponse : $\chi_{obs}^2 = 3.33$, au seuil de 5%, $\chi_{crit}^2 = 3.84$. On accepte donc H_0 .

Avec les notations de la table du test de Wilcoxon Mann Whitney, on a : $N_1 = 15$, $N_2 = 15$, $W = 192.5$. Au seuil de 5%, $W_s = 192$, $W'_s = 273$. On accepte donc H_0 (mais il s'agit vraiment d'un cas "limite").

Exercice 42

On étudie les comportements agressifs d'un groupe d'enfants ayant des difficultés de comportement, pendant une demi-journée, avant et après la projection d'un film d'aventures. Peut-on dire que ce film a eu une influence sur le comportement agressif des enfants? (on trouvera dans le tableau 6 page 25 trois colonnes indiquant le numéro du sujet, le nombre de comportements agressifs avant la projection et le nombre de comportements agressifs après la projection). Apporter une réponse à la question posée en utilisant un test de

Sujet	Avant	Après	Sujet	Avant	Après
1	46	71	14	84	35
2	31	79	15	2	28
3	65	27	16	5	39
4	61	39	17	99	53
5	47	75	18	88	66
6	32	28	19	75	40
7	58	32	20	71	84
8	14	36	21	23	14
9	7	61	22	84	15
10	48	83	23	2	99
11	43	80	24	34	36
12	33	28	25	92	13
13	14	72	26	61	87

Tableau 6: Comportements agressifs

Wilcoxon.

Réponse : $T = T_- = 194.5$, $z_{obs} = 0.47$. On ne peut pas refuser l'hypothèse nulle.

En utilisant la table du test de Wilcoxon, on a : $N = 26$, $T_{min} = T_+ = 156.5$ et, au seuil de 5% unilatéral, $T_{m,crit} = 110$. On ne peut donc pas refuser H_0 .

Exercice 43

Dans une crèche, on a observé des enfants en présence de deux puéricultrices différentes; on a compté, suivant une grille préalablement établie, le nombre de comportements verbaux de ces enfants, pendant une période déterminée. Les résultats sont donnés dans les tableaux suivants. Peut-on dire qu'il y a une différence de comportements verbaux entre les deux observations?

Séance 1	Séance 2	Diff.	Rang-	Rang+
64	88	24		17
62	42	-20	11	
10	65	55		24
61	87	26		19
17	9	-8	5,5	
20	28	8		5,5
65	87	22		13
10	78	68		27
67	9	-58	25	
25	58	33		22
1	92	91		30
42	36	-6	4	
90	66	-24	17	
87	22	-65	26	
93	4	-89	29	

Séance 1	Séance 2	Diff.	Rang-	Rang+
16	39	23		14,5
16	66	50		23
83	70	-13	8	
45	13	-32	20,5	
33	10	-23	14,5	
21	10	-11	7	
30	54	24		17
67	50	-17	10	
34	2	-32	20,5	
93	10	-83	28	
78	73	-5	2,5	
63	42	-21	12	
49	65	16		9
71	73	2		1
93	98	5		2,5

Répondre à la question posée à l'aide d'un test des signes puis d'un test de Wilcoxon.

Réponses : Test des signes : $D = D_- = 16$, $z_{obs} = 0.18$. On ne peut pas refuser l'hypothèse

nulle.

Test de Wilcoxon : $T_- = 240.5$, $z_{obs} = 0.15$. Même conclusion.

Avec les notations de la table du test de Wilcoxon : $N = 30$, $T_{min} = T_+ = 224.5$. Au seuil de 5% unilatéral, $T_{m,crit} = 151$. On accepte donc H_0 .

Exercice 44

On dit que dans une famille, les aînés ont tendance à être plus indépendants que leurs cadets. Un chercheur élabore une échelle d'indépendance en 25 points et procède à l'évaluation de 20 aînés et du frère ou de la sœur qui suit directement chacun des aînés. Imaginons qu'il obtienne les résultats suivants :

Paire	Aîné	Cadet
1	8	9
2	13	15
3	8	10
4	5	7
5	12	10
6	15	13
7	5	8
8	15	12
9	16	13
10	5	9

Paire	Aîné	Cadet
11	17	13
12	12	8
13	2	7
14	13	8
15	19	14
16	18	12
17	14	8
18	17	11
19	18	12
20	20	10

Quels sont les individus statistiques et les variables étudiés ?

À partir des données ci-dessus, construire le protocole des rangs signés.

N.B. Malgré leur désordre apparent, les données ont été classées de manière à faciliter ce travail...

Tester l'hypothèse du chercheur à l'aide d'un test de Wilcoxon, au seuil de 5%.

Réponse : $T_+ = 164$; $T_- = 46$. En utilisant la table de Wilcoxon, on trouve, au seuil de 5%, $T_{m,c} = 60$. L'hypothèse "les aînés sont plus indépendants que leurs cadets" est donc confirmée. On peut aussi utiliser l'approximation par une loi normale. On obtient $Z_{obs} = 2.18$ et la conclusion est la même.

Exercice 45

Quelle différence faites-vous entre un test *paramétrique* et un test *non paramétrique*. Dans quelles circonstances est-il préférable d'utiliser des tests non paramétriques ?