Effet simple d'un facteur $\mathcal{A}$: effet observé de $\mathcal{A}$ lorsque les autres facteurs sont fixés.

Effet principal d'un facteur $\mathcal{A}$: effet observé de $\mathcal{A}$, sans tenir compte des autres conditions.

Définition et écriture d'un plan d'expérience

En général, plusieurs facteurs, avec interaction. Donc : étude simultanée.

Plan factoriel :

Un plan factoriel est un plan dans lequel chaque modalité d'un facteur est combinée avec chaque combinaison de modalités des autres facteurs.

Plan en carré latin

Exemple : 3 facteurs comportant le même nombre de modalités.

On croise les deux premiers facteurs. Les modalités du troisième sont distribuées de façon à réaliser des permutations sur les lignes et les colonnes.

Exemple.

$a_1b_1c_1$	$a_1b_2c_2$	$a_1b_3c_3$
$a_2b_1c_2$	$a_2b_2c_3$	$a_2b_3c_1$
$a_3b_1c_3$	$a_3b_2c_1$	$a_3b_3c_2$

Plans quasi-complets (Rouanet - Lépine 1976)

Croisement : deux ou plusieurs facteurs sont croisés si chaque niveau de l'un des facteurs est combiné avec chaque niveau de chacun des autres facteurs.
Notation : $\mathcal{A}_3 * \mathcal{B}_5$ par exemple.

Emboîtement : Un facteur $\mathcal{A}$ est emboîté dans un facteur $\mathcal{B}$ si chaque niveau de $\mathcal{A}$ est combiné avec un seul niveau de $\mathcal{B}$.
Notation : $\mathcal{A} < \mathcal{B} >$

Emboîtement équilibré : pour chaque niveau du facteur emboîtant, on a le même nombre de niveaux du facteur emboîté.

Les plans *quasi-complets* sont les plans qui peuvent être décrits à l'aide de relations de croisement et d'emboîtement.

Définition :

Un plan est dit *quasi-complet* s'il possède les deux propriétés suivantes :

– Tous les facteurs croisés deux à deux sont croisés ou emboîtés

– Les facteurs croisés deux à deux sont croisés dans leur ensemble.

Exemple : $\mathcal{S}_4 < \mathcal{A}_2 > *\mathcal{B}_2$

Lorsque le facteur *sujet* est croisé avec d'autres facteurs : *plan à mesures répétées*

Dériver un plan d'expérience
Déterminer les sources de variation

1. Ecrire la formule du plan en termes de $*$ et $<>$

Exemple : $\mathcal{S} < \mathcal{A} > *\mathcal{B} * \mathcal{C}$

2. Ecrire les facteurs élémentaires, avec la règle suivante :
Lorsqu'un facteur est emboîté, le facteur élémentaire est accompagné de l'ensemble des facteurs emboîtants, entre parenthèses.

Exemple : $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{S}(\mathcal{A})$

3. Termes d'interaction : autant d'étapes que de symboles $*$ dans le plan.

Etape 1 : Interactions d'ordre 1. Croiser tous les facteurs élémentaires deux à deux. Rassembler les termes entre parenthèses. Supprimer le terme d'interaction si un facteur y apparaît deux fois.

Exemple : $\mathcal{AB}$, $\mathcal{AC}$, $\mathcal{BC}$, $\mathcal{BS}(\mathcal{A})$, $\mathcal{CS}(\mathcal{A})$

Etape 2 : Interactions d'ordre 2. Croiser les facteurs élémentaires et les termes d'interaction précédents, en appliquant la même règle

Exemple : $\mathcal{ABC}$, $\mathcal{BCS}(\mathcal{A})$

Ainsi, pour l'exemple proposé : 11 sources de variation.

Modèle de score

Hypothèse : additivité des effets.

A chaque source de variation correspond un effet. Si le plan comporte des mesures répétées, il y a aussi un terme d'erreur ; sinon, c'est le terme d'interaction comportant toutes les lettres du plan qui joue ce rôle.

Exemple 1. Pour un plan $\mathcal{S} < \mathcal{A} >$:

$$Y_{as} = \mu + \alpha_a + e_{s(a)}$$

Exemple 2. Pour un plan $\mathcal{S} * \mathcal{A}$

$$Y_{as} = \mu + \alpha_a + s_s + \alpha s_{as} + e_{as}$$

Analyse de variance à plusieurs facteurs

Plan $\mathcal{S}_n * \mathcal{A}_a$

Notations
a : nombre de conditions expérimentales.
n : nombre de sujets.
x_{ij} : valeur de la VD pour le i-ième individu dans la condition expérimentale j.

Hypothèses du test
H_0 : Dans la population parente, les moyennes correspondant aux a conditions expérimentales sont égales.
H_1 : Les moyennes sont différentes.

Présentation des résultats

Source	S. carrés	ddl	C. moyen	F
$\mathcal{A}$	SC_A	$a-1$	CM_A	$\dfrac{CM_A}{CM_{AS}}$
$\mathcal{S}$	SC_S	$n-1$	CM_S	
Résid.	SC_{AS}	$(n-1)(a-1)$	CM_{AS}	
Total	SC_T	$N-1$		

Les carrés moyens sont obtenus en divisant la somme des carrés de la ligne par le nombre de ddl de la même ligne.
F suit une loi de Fisher-Snedecor à $a-1$ et $(n-1)(a-1)$ degrés de liberté.

Exemple : Effet du bruit sur la discrimination perceptive
Facteur : bruit (3 niveaux)
VD : nombre d'erreurs commises.

Sujets	Absence	Intermittent	Continu
1	117	119	127
2	130	126	131
3	122	118	129
4	123	117	134
5	126	120	137
6	116	120	128

Source	S. carrés	ddl	C. moyen	F
Bruit	403.11	2	201.56	19.98 **
Sujets	164.44	5	32.89	
Résid.	100.89	10	10.09	
Total	668.44	17		

Plan $\mathcal{S} < \mathcal{A}_a * \mathcal{B}_b >$

$\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$: facteurs fixes.

Notations
a, b, n, x_{ijk}, N

Interaction entre les facteurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$

Tableau d'analyse de variance

Source	S. carrés	ddl	C. moyen	F
$\mathcal{A}$	SC_A	$a-1$	CM_A	$\dfrac{CM_A}{CM_{S(AB)}}$
$\mathcal{B}$	SC_B	$b-1$	CM_B	$\dfrac{CM_B}{CM_{S(AB)}}$
$\mathcal{AB}$	SC_{AB}	$(a-1)(b-1)$	CM_{AB}	$\dfrac{CM_{AB}}{CM_{S(AB)}}$
Résid.	$SC_{S(AB)}$	$ab(n-1)$	$CM_{S(AB)}$	
Total	SC_T	$N-1$		

Comme précédemment, chaque carré moyen est calculé en divisant la somme des carrés de la ligne par le nombre de ddl correspondant.

Les statistiques F_A, F_B, F_{AB} suivent des lois de Fisher Snedecor, avec des nombres de ddl différents. Le nombre de degrés de liberté du numérateur est respectivement $(a-1)$, $(b-1)$ et $(a-1)(b-1)$. Celui du dénominateur est $ab(n-1)$.

Exemple : facteurs : sexe, statut socio-économique.
VD : mesure du "locus of control"

	statut socio-économique		
	Bas	Moyen	Elevé
Hommes	10	16	18
	12	12	14
	8	19	17
	14	17	13
	10	15	19
	16	11	15
	15	14	22
	13	10	20
Femmes	8	14	12
	10	10	18
	7	13	14
	9	9	21
	12	17	19
	5	15	17
	8	12	13
	7	8	16

Sources de var.	ddl	SC	CM	F
Sexe	1	65.33	65.33	7.73**
Statut soc-éco	2	338.67	169.33	20.03**
$X \times C$	2	18.67	9.33	1.10 NS
Résidu	42	355.0	8.45	
Total	47	777.67		

Conclusion : les deux facteurs (sexe et statut socio-économique) ont des effets significatifs. En revanche, on n'a pas observé d'interaction entre ces facteurs.