

## Révisions et tests de connaissances

### Exercice 1 *Statistiques descriptives* Données âges

Dans un groupe de travaux dirigés de licence, on a relevé les dates de naissance de l'ensemble des étudiants :

04/07/74 05/09/75 21/05/74 20/01/76  
 01/10/76 18/05/75 29/07/76 21/07/77  
 18/11/76 17/03/76 02/02/77 11/05/65  
 10/09/77 19/02/76 11/03/76 01/06/77  
 07/05/77 06/10/74 30/05/77 16/12/73  
 23/02/77 16/12/75 25/10/74 23/01/73  
 28/12/76 21/12/75 28/01/72 06/09/75  
 21/01/77 24/07/61 19/01/76 16/02/74  
 14/10/75 22/08/64 09/06/75 04/01/77  
 27/01/74 05/09/63 24/10/76 14/11/74  
 11/07/76 18/12/77 25/03/75 12/01/73  
 26/03/72 09/03/74 11/10/69 14/06/60

1) Calculer l'âge en nombre entier d'années de chacun des sujets, au 1/10/1997. Pourquoi s'intéresser à l'âge plutôt qu'à la date de naissance ?

2) Calculer la moyenne, la médiane, le mode, la variance et l'écart-type de l'ensemble des valeurs observées de la variable "âge".

3) On s'intéresse à différents codages de cette variable :

{ codage numérique 1 : âge en années (*date de référence : 1/10/1997*)

{ codage numérique 2 : âge en mois (*compté au 1/10/97*)

{ codage en rangs (*rappel : rang 1 pour le plus jeune, convention habituelle pour les ex-æquos : attribution du rang moyen*)

{ codage ordinal ; *par exemple, utiliser le codage suivant :*

| Age              | Code |
|------------------|------|
| $19 \leq A < 21$ | 1    |
| $21 \leq A < 24$ | 2    |
| $24 \leq A < 27$ | 3    |
| $27 \leq A < 30$ | 4    |
| $30 \leq A < 38$ | 5    |

{ codage binaire : par exemple, coder 0 pour les individus en dessous de la moyenne, 1 pour ceux au dessus.

{ codage centre : écarts à la moyenne

{ codage centre réduit : écarts réduits.

a) Compléter un tableau du type de celui figurant sur la page suivante.

b) Calculer la moyenne, la variance et l'écart type de la série regroupée en classes (cf. codage ordinal).

4) Construire un histogramme de la distribution en années.

*Réponses : 2)  $m = 22.90$  ;  $s = 4.28$  ;  $s_c = 4.33$ ,  $Md = 21.5$ ,  $Mode = 20$ .*

*3-b)  $m' = 23.34$  ;  $s'^2 = 16.39$  ;  $s' = 4.05$*

| Suj. | Date-Nais | Age-1 | Age-2 | Rang | Ord. | Bin. | Centre   | Cent-Red   |
|------|-----------|-------|-------|------|------|------|----------|------------|
| i42  | 18/12/77  | 19    | 237   | 1    | 1    | 0    | -43,9375 | -0,86543   |
| i29  | 21/10/77  | 19    | 239   | 2    | 1    | 0    | -41,9375 | -0,826036  |
| i13  | 10/09/77  | 20    | 240   | 3    | 1    | 0    | -40,9375 | -0,806339  |
| i08  | 21/07/77  | 20    | 242   | 4    | 1    | 0    | -38,9375 | -0,766946  |
| i16  | 01/06/77  | 20    | 244   | 6    | 1    | 0    | -36,9375 | -0,727552  |
| i17  | 07/05/77  | 20    | 244   | 6    | 1    | 0    | -36,9375 | -0,727552  |
| i19  | 30/05/77  | 20    | 244   | 6    | 1    | 0    | -36,9375 | -0,727552  |
| i11  | 02/02/77  | 20    | 247   | 8,5  | 1    | 0    | -33,9375 | -0,668461  |
| i21  | 23/02/77  | 20    | 247   | 8,5  | 1    | 0    | -33,9375 | -0,668461  |
| i36  | 04/01/77  | 20    | 248   | 10   | 1    | 0    | -32,9375 | -0,648765  |
| i25  | 28/12/76  | 20    | 249   | 11   | 1    | 0    | -31,9375 | -0,629068  |
| i09  | 18/11/76  | 20    | 250   | 12   | 1    | 0    | -30,9375 | -0,609371  |
| i05  | 01/10/76  | 20    | 251   | 13,5 | 1    | 0    | -29,9375 | -0,589674  |
| i39  | 24/10/76  | 20    | 251   | 13,5 | 1    | 0    | -29,9375 | -0,589674  |
| i07  | 29/07/76  | 21    | 254   | 15,5 | 2    | 0    | -26,9375 | -0,530584  |
| i41  | 11/07/76  | 21    | 254   | 15,5 | 2    | 0    | -26,9375 | -0,530584  |
| i10  | 17/03/76  | 21    | 258   | 17,5 | 2    | 0    | -22,9375 | -0,451796  |
| i15  | 11/03/76  | 21    | 258   | 17,5 | 2    | 0    | -22,9375 | -0,451796  |
| i14  | 19/02/76  | 21    | 259   | 19   | 2    | 0    | -21,9375 | -0,432099  |
| i04  | 20/01/76  | 21    | 260   | 20,5 | 2    | 0    | -20,9375 | -0,412403  |
| i31  | 19/01/76  | 21    | 260   | 20,5 | 2    | 0    | -20,9375 | -0,412403  |
| i22  | 16/12/75  | 21    | 261   | 22,5 | 2    | 0    | -19,9375 | -0,392706  |
| i26  | 21/12/75  | 21    | 261   | 22,5 | 2    | 0    | -19,9375 | -0,392706  |
| i33  | 14/10/75  | 21    | 263   | 24   | 2    | 0    | -17,9375 | -0,353312  |
| i02  | 05/09/75  | 22    | 264   | 25,5 | 2    | 0    | -16,9375 | -0,333615  |
| i28  | 06/09/75  | 22    | 264   | 25,5 | 2    | 0    | -16,9375 | -0,333615  |
| i35  | 09/06/75  | 22    | 267   | 27   | 2    | 0    | -13,9375 | -0,274525  |
| i06  | 18/05/75  | 22    | 268   | 28   | 2    | 0    | -12,9375 | -0,254828  |
| i43  | 25/03/75  | 22    | 270   | 29   | 2    | 0    | -10,9375 | -0,215434  |
| i40  | 14/11/74  | 22    | 274   | 30   | 2    | 0    | -6,9375  | -0,136647  |
| i18  | 06/10/74  | 22    | 275   | 31,5 | 2    | 0    | -5,9375  | -0,11695   |
| i23  | 25/10/74  | 22    | 275   | 31,5 | 2    | 0    | -5,9375  | -0,11695   |
| i01  | 04/07/74  | 23    | 278   | 33   | 2    | 0    | -2,9375  | -0,0578595 |
| i03  | 21/05/74  | 23    | 280   | 34   | 2    | 0    | -0,9375  | -0,0184658 |
| i46  | 09/03/74  | 23    | 282   | 35   | 2    | 1    | 1,0625   | 0,0209279  |
| i32  | 16/02/74  | 23    | 283   | 36   | 2    | 1    | 2,0625   | 0,0406247  |
| i37  | 27/01/74  | 23    | 284   | 37   | 2    | 1    | 3,0625   | 0,0603216  |
| i20  | 16/12/73  | 23    | 285   | 38   | 2    | 1    | 4,0625   | 0,0800184  |
| i24  | 23/01/73  | 24    | 296   | 39,5 | 3    | 1    | 15,0625  | 0,296684   |
| i44  | 12/01/73  | 24    | 296   | 39,5 | 3    | 1    | 15,0625  | 0,296684   |
| i45  | 26/03/72  | 25    | 306   | 41   | 3    | 1    | 25,0625  | 0,493652   |
| i27  | 28/01/72  | 25    | 308   | 42   | 3    | 1    | 27,0625  | 0,533046   |
| i47  | 11/10/69  | 27    | 335   | 43   | 4    | 1    | 54,0625  | 1,06486    |
| i12  | 11/05/65  | 32    | 388   | 44   | 5    | 1    | 107,063  | 2,10879    |
| i34  | 22/08/64  | 33    | 397   | 45   | 5    | 1    | 116,063  | 2,28606    |
| i38  | 05/09/63  | 34    | 408   | 46   | 5    | 1    | 127,063  | 2,50273    |
| i30  | 27/07/61  | 36    | 434   | 47   | 5    | 1    | 153,063  | 3,01485    |
| i48  | 14/06/60  | 37    | 447   | 48   | 5    | 1    | 166,063  | 3,27091    |

**Exercice 2** Distributions théoriques - loi binomiale

Dans le cadre d'une étude sur les familles nombreuses, on veut constituer un échantillon de 100 familles représentatif des familles de 5 enfants.

1) Combien de familles comportant 1 garçon et 4 filles doit-on retenir pour constituer l'échantillon?

2) Même question pour les familles comportant 0, 2, 3, 4, 5 garçons.

*N.B. On fera l'hypothèse que la probabilité d'avoir un garçon ou une fille est égale à 0.5*

3) Représenter la distribution obtenue à l'aide d'un diagramme en bâtons.

*Réponse : Les effectifs respectifs des familles comportant 0, 1, ..., 5 garçons sont donnés*

*par : 3, 16, 31, 31, 16, 3*

**Echantillonnage****Exercice 3**

The mean of a large sample is  $K$  and  $\sigma_K$  is  $2.50^{(1)}$ . What are the chances that the sample mean misses the true mean by more than : (a)  $\pm 1.00$ , (b)  $\pm 3.00$ , (c)  $\pm 10.00$ .

*Réponses : (a) 69%, (b) 23%, (c) moins de 1%.*

**Exercice 4**

Un test comportemental a été étalonné auprès d'une population de 3500 personnes. On sait que la moyenne au test est de 54.24 et que l'écart type est de 6.82. On sait en outre que la variable étudiée est distribuée selon une loi normale.

1) Quelle est la proportion de sujets qui ont une note supérieure à 62? Quel est leur nombre?

2) Quelle est la proportion de sujets qui ont une note comprise entre 45 et 70? Quel est leur nombre?

3) Quelle est la valeur de la variable correspondant au quartile inférieur ( $Q_1$ ) de la distribution?

Même question pour le quartile supérieur ( $Q_3$ ).

4) On tire au hasard, avec remise, un échantillon de 100 sujets de la population étudiée. Soit  $\bar{X}$  la variable "moyenne observée sur l'échantillon tiré".

a) Quelle est la loi suivie par cette variable? Quels sont ses paramètres?

b) Donner un intervalle rassemblant 95% des valeurs de  $\bar{X}$  observées sur de tels échantillons.

*Réponses : 1)  $P(X > 62) = 0.1291$ , d'où  $N_1 = 452$ .*

*2)  $P(45 \leq X < 70) = 0.9011$  d'où  $N_2 = 3153$ .*

*3)  $P(X \leq a) = 0.25$  pour  $a = 49.63$ .  $P(X \leq a) = 0.75$  pour  $a = 58.84$ .*

*4) La distribution d'échantillonnage a pour paramètres :  $\mu = 54.24$  et  $S = 0.682$ . L'intervalle, centré autour de la moyenne, rassemblant 95% des échantillons est :  $[52.90; 55.58]$ .*

**Exercice 5**

Opinion upon an issue seems about equally divided. How large a sample ( $N$ ) would you need to be sure (at .01 level) that a deviation of 3% in a sample is not accidental (due to chance)?

*Réponse : 1850*

---

<sup>1</sup> $\sigma_K$  désigne ici l'écart type de la distribution d'échantillonnage

## Introduction aux tests statistiques

### Exercice 6

In which of the following experimental problems would it be more important to avoid Type I errors of inference than Type II errors in determining the significance of a difference?

- Sex differences in reading rate and comprehension in the 5th grade.
- Effects of a new drug upon reaction time { especially when the drugs are potent and probably dangerous.
- Comparison of two methods of learning a new skill.
- Acceptance of a program which involves much time and money and rejection of a less expensive program.
- Comparative efficiency of a speed-up and a normal rate of work in a factory.

Réponses : a, c, d, e

### Exercice 7

\Le probleme lie a l'interpretation d'une hypothese nulle qui n'a pas ete rejetee tourmente depuis plus de 50 ans les etudiants inscrits a un cours de statistiques. Tous les statisticiens s'accordent cependant sur un point : on ne peut jamais pretendre avoir "prouve" l'hypothese nulle.

Pour Fisher, un resultat non significatif n'est pas un resultat concluant. D'apres lui, on a le choix entre rejeter une hypothese nulle et suspendre son jugement.

Neymann et Pearson adoptent une approche legerement differente. Soit on rejette l'hypothese nulle, soit on l'*accepte*. Toutefois, quand on dit que l'on accepte une hypothese nulle, cela ne veut pas dire que l'on estime en avoir prouve l'exactitude. Cela veut dire que l'on fera *comme si* elle etait vraie, au moins jusqu'a ce que l'on obtienne des donnees plus adequates."

Quels commentaires ces deux opinions suggerent-elles? Donner deux exemples de situations dans lesquelles on sera conduit a adopter l'une ou l'autre des deux demarches.

Réponse : Une hypothèse nulle peut ne pas être rejetée à cause d'une trop faible taille d'échantillon, ou de l'existence de variables non contrôlées qui ont artificiellement augmenté la dispersion. Il y a des cas où l'on est conduit à accepter l'hypothèse nulle, jusqu'à ce que des informations contraires viennent la contredire. Exemple : absence d'effet indésirable d'un médicament.

## Inférence sur une moyenne. Comparaison à une norme

### Exercice 8

Dans ce qui suit, on se donne une population de reference dans laquelle la distribution du QI est une loi normale de parametres  $\mu = 100$  et  $\sigma = 15$ .

- Dans une classe de rattrapage, on examine un groupe de 5 eleves et on trouve un QI moyen  $\bar{QI} = 89.2$ . Peut-on dire que le groupe de 5 eleves est, pour le QI, atypique de la population de reference aux seuils traditionnels?
- La classe de rattrapage compte 25 eleves; on examine tous les eleves et on trouve un QI moyen  $\bar{QI} = 89.2$ . Mêmes questions que precedemment.

Réponses : a)  $z_{obs} = -1.61$ . On ne peut pas retenir l'hypothèse d'un groupe atypique au seuil de 5% unilatéral. b)  $z_{obs} = -3.6$ . Groupe atypique au seuil de 1% unilatéral

**Exercice 9**

Compas et ses collègues (étude non publiée) ont constaté avec surprise que les jeunes enfants soumis au stress présentent en fait moins de symptômes d'anxiété et de dépression que ce à quoi l'on pourrait s'attendre. Toutefois, ils ont aussi remarqué que les scores obtenus par ces enfants sur une échelle de désirabilité sociale sont étonnamment élevés. On sait que la moyenne de population de l'échelle de désirabilité sociale est égale à 3.87. Pour un échantillon de 36 enfants soumis au stress, Compas *et al.* ont relevé une moyenne d'échantillon de 4.39, avec un écart type de 2.61.

- 1) Par quel test pourrait-on savoir si ce groupe présente une tendance accrue à donner des réponses socialement acceptables?
- 2) Quelles seraient l'hypothèse nulle et l'hypothèse alternative?
- 3) Mettre en œuvre le test choisi et conclure.

*Réponse : Il s'agit ici de comparer la moyenne observée sur l'échantillon à la valeur 3.87, considérée comme une norme. Compte tenu de la taille de l'échantillon, on peut utiliser la statistique :*

$$Z = \frac{\bar{x} - 3.87}{E} \quad \text{avec} \quad E^2 = \frac{2.61^2}{36}$$

*qui suit une loi normale centrée réduite.*

*On obtient alors  $Z_{obs} = 1.20$ , ce qui n'est pas significatif d'une différence.*

**Exercice 10**

Dans une grande entreprise (américaine), le salaire moyen des hommes possédant entre 3 et 5 ans d'expérience est de 28 000 \$. Les salaires (en milliers de dollars) d'un échantillon aléatoire de 10 femmes possédant entre 3 et 5 ans d'expérience sont les suivants :

24 27 31 21 19 26 30 22 15 36

- 1) Au niveau descriptif, quelle estimation peut-on faire du salaire moyen féminin?
- 2) Y a-t-il des preuves attestant de niveaux de salaires différents pour les hommes et les femmes?

*Réponses : 1) La moyenne des salaires sur l'échantillon est  $\bar{x} = 25.1$ . On peut donc estimer le salaire féminin moyen à 25 100 \$.*

*2) On a par ailleurs :  $s_c = 6.23$ . La statistique de test (comparaison d'une moyenne à une norme sur un petit échantillon) vaut :  $t = \frac{25.1 - 28}{E}$  avec  $E^2 = \frac{6.23^2}{10}$ , d'où  $t_{obs} = -1.47$ . Cette statistique suit une loi de Student à 9 ddl, et donc, pour un test unilatéral au seuil de 5%,  $t_{crit} = 1.83$ . On conclut donc sur  $H_0$  : on n'a pas mis en évidence de différence entre les hommes et les femmes.*

**Exercice 11**

1) En 2003-2004, la population des étudiants inscrits dans le secteur Lettres à l'UBO était constituée de 3635 femmes et 1338 hommes.

L'échantillon constitué par les étudiants inscrits au centre littéraire de Quimper comprenait 405 femmes pour 174 hommes.

Du point de vue de la variable étudiée, peut-on considérer cet échantillon comme tiré au hasard dans la population des étudiants littéraires de l'UBO (seuil utilisé : 1%) ?

2) De même, la population des étudiants inscrits dans le secteur Sciences était constituée de 1361 femmes pour 2232 hommes.

a) L'échantillon constitué par les étudiants inscrits à l'IUP Génie Mécanique et Productique comprenait 11 femmes pour 138 hommes.

Du point de vue de la variable étudiée, peut-on considérer cet échantillon comme tiré au hasard dans la population des étudiants scientifiques de l'UBO (seuil utilisé : 1%) ?

b) Même question pour les étudiants de l'IUP Génie des Systèmes Industriels (69 femmes pour 25 hommes).

Réponses : 1) On fait ici un test de comparaison d'une proportion à une norme. La proportion de femmes dans la population est  $p_0 = 0.7309$ , tandis que la proportion observée sur l'échantillon est  $f = 0.6995$ , avec une taille d'échantillon  $n = 579$ . On obtient  $Z_{obs} = -1.70$ . On retient donc  $H_0$ , ce qui revient à répondre positivement à la question posée.

2) a) On a ici :  $p_0 = 0.3788$  et  $f = 0.0738$  et donc  $Z_{obs} = -7.67$ . Du point de vue de la répartition par sexe, l'échantillon formé par les étudiants de l'IUP GMP est donc tout à fait atypique de la population des étudiants scientifiques.

b) On a :  $p_0 = 0.3788$  et  $f = 0.7340$  d'où  $Z_{obs} = 7.10$  et une conclusion similaire à la précédente.

## Tests d'égalité de moyennes, de fréquences

### Exercice 12 Dossier "Plpc", "Plpc-cor"

Dans une recherche de psychologie, on a présenté à chaque sujet des photographies de chiens, de diverses races, pour moitié à poils courts et pour moitié à poils longs. Chaque sujet évalue le chien présenté en cochant l'une des 6 cases d'une échelle d'attraction. Les évaluations ont été codées numériquement de 0 (faible attraction) à 5 (forte attraction). Dans le tableau ci-dessous, on donne pour chacun des 16 sujets les deux valeurs moyennes des évaluations concernant les deux types de chiens.

|              |      |      |      |      |      |      |      |      |
|--------------|------|------|------|------|------|------|------|------|
|              | s1   | s2   | s3   | s4   | s5   | s6   | s7   | s8   |
| Poils longs  | 3,50 | 2,75 | 3,50 | 2,75 | 1,50 | 3,00 | 4,00 | 3,00 |
| Poils courts | 2,50 | 1,25 | 2,75 | 0,50 | 2,00 | 3,00 | 2,00 | 2,00 |
|              | s9   | s10  | s11  | s12  | s13  | s14  | s15  | s16  |
| Poils longs  | 2,75 | 3,25 | 4,00 | 3,00 | 3,75 | 4,00 | 4,00 | 3,25 |
| Poils courts | 2,50 | 0,75 | 0,50 | 1,00 | 1,50 | 1,75 | 2,00 | 2,00 |

Un effet individuel est de noter la différence entre les deux notes concernant un même sujet. Construire le protocole des effets individuels.

Peut-on affirmer, au seuil de 5%, que les chiens à poils longs sont préférés à ceux à poils courts.

Remarque. La variable statistique de départ (classement sur une échelle d'attraction) est en fait ordinale et non numérique. Nous reprendrons cet exemple avec d'autres outils dans un chapitre ultérieur.

Réponses : Le protocole des effets individuels a pour moyenne  $\bar{d} = 1.5$  et pour écart type corrigé  $s_c = 1.0448$ . On obtient  $t_{obs} = 5,74$ . La différence est significative au seuil de 5%.

### Exercice 13 Dossier "Internat"

Pour une recherche internationale sur l'évaluation des savoir-faire en situation de vie quotidienne, on a construit un test comportant une version en français et une version en anglais. Pour s'assurer de l'équivalence des deux instruments, on administre les deux versions du test à un groupe de 24 paires de sujets, chaque paire comprenant un sujet de langue maternelle anglaise et un sujet de langue maternelle française. Pour constituer les

paire, les sujets sont appariés sur un ensemble de variables permettant de s'assurer de l'équivalence de leur expérience. Le plan du protocole est P24\*T2.

On cherche à répondre à la question "les sujets obtiennent-ils le même résultat au test en anglais ( $t_1$ ) et au test en français ( $t_2$ )".

| Sujet | $t_1$ | $t_2$ | Sujet | $t_1$ | $t_2$ | Sujet | $t_1$ | $t_2$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| S1    | 27.0  | 25.5  | S9    | 27.0  | 28.5  | S17   | 21.5  | 20.5  |
| S2    | 23.0  | 23.5  | S10   | 28.5  | 26.0  | S18   | 19.5  | 23.5  |
| S3    | 21.5  | 18.5  | S11   | 26.5  | 23.0  | S19   | 23.5  | 23.0  |
| S4    | 24.0  | 22.0  | S12   | 24.0  | 24.5  | S20   | 21.0  | 24.0  |
| S5    | 22.5  | 28.0  | S13   | 26.0  | 23.5  | S21   | 23.0  | 24.0  |
| S6    | 24.0  | 19.0  | S14   | 21.5  | 22.0  | S22   | 20.0  | 20.5  |
| S7    | 21.5  | 19.0  | S15   | 26.5  | 22.0  | S23   | 20.0  | 17.5  |
| S8    | 22.0  | 25.5  | S16   | 20.0  | 16.0  | S24   | 21.0  | 16.0  |

Réponses : On introduit le protocole des différences individuelles  $D$  défini par :  $d_i = t_{i2} - t_{i1}$ . On a :  $\bar{d} = -0.8125$ ,  $s_c = 2.9185$ .  $t_{obs} = -1.36386$ . Ici,  $ddl = 23$  et donc, au seuil de 5% bilatéral,  $t_{crit} = 2.07$ . On ne peut donc pas rejeter l'hypothèse nulle

**Exercice 14 Dossier "Manage"**

Dans une étude de psychologie du travail, on cherche à déterminer l'influence de deux conceptions manageriales, l'une "hiérarchique" ( $H$ ), l'autre "démocratique" ( $D$ ) sur la sécurité dans l'entreprise. À cet effet, on prélève au hasard, dans un vaste ensemble de données, quinze intervalles trimestriels pour lesquels on relève ensuite le nombre d'incidents qui se sont produits sur chacun des sites, par ailleurs comparables à tous égards. Les données résultant des tirages aléatoires sont les suivantes :

| Trim.     | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|-----------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Conc. $H$ | 11 | 11 | 14 | 21 | 12 | 10 | 15 | 15 | 17 | 9  | 12 | 12 | 15 | 12 | 11 |
| Conc. $D$ | 8  | 13 | 12 | 17 | 14 | 9  | 10 | 12 | 13 | 10 | 8  | 13 | 12 | 9  | 9  |

- 1) Calculer la moyenne et l'écart type de chacun des deux échantillons proposés. À partir de ces éléments, formuler une conclusion descriptive concernant le problème posé.
- 2) Les données observées dérivent-elles des échantillons indépendants ou appariés ?
- 3) Réaliser un test statistique approprié en précisant avec soin l'hypothèse nulle et l'hypothèse alternative, la statistique de test utilisée, la loi suivie par cette statistique et le seuil choisi.

Réponses : 1)  $\bar{x}_1 = 13.33$ ,  $\bar{x}_2 = 11.27$ ,  $s_{1c} = 3.09$ ,  $s_{2c} = 2.55$ . 3)  $\bar{d} = 1.87$ .  $s_c = 2.33$ .  $t_{obs} = 3.10$ . La différence est significative au seuil de 1% (test bilatéral).

**Exercice 15 Dossier "Usine"**

Dans une usine, on cherche à voir si un changement de l'environnement (musique dans les ateliers en particulier) peut modifier le rendement. Ce dernier est mesuré ici par le nombre moyen de pièces produites à l'heure par chaque ouvrier.

- 1) On note pour chacun des 33 ouvriers observés, son rendement avant et après l'introduction de ces changements. Les résultats sont les suivants.

| Avant | Après | Avant | Après | Avant | Après |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 45    | 48    | 30    | 35    | 40    | 45    |
| 36    | 40    | 45    | 50    | 40    | 35    |
| 47    | 53    | 30    | 40    | 38    | 35    |
| 40    | 40    | 45    | 50    | 35    | 40    |
| 45    | 46    | 40    | 45    | 40    | 45    |
| 35    | 30    | 50    | 50    | 35    | 37    |
| 36    | 40    | 40    | 40    | 38    | 35    |
| 50    | 60    | 50    | 45    | 50    | 50    |
| 50    | 60    | 40    | 35    | 45    | 50    |
| 40    | 40    | 55    | 50    | 30    | 33    |
| 40    | 40    | 30    | 35    | 38    | 38    |

Effectuer les calculs permettant de répondre à la question posée et conclure.

2) On suppose maintenant que les données ci-dessus concernent deux groupes d'ouvriers distincts, les premiers (colonne "Avant") placés dans un environnement ordinaire, les seconds (colonne "Après") placés dans un environnement modifié. Quels sont alors les calculs à effectuer et quelle est alors la conclusion ?

Réponses : 1)  $\bar{d} = 2.03$ ,  $s_c = 4.41$ .  $z_{obs} = 2.64$ . La différence est significative pour un test unilatéral au seuil de 1%.

2)  $\bar{x}_1 = 40.85$ ,  $\bar{x}_2 = 42.88$ ,  $s_{1c} = 6.60$ ,  $s_{2c} = 7.52$ ,  $z_{obs} = 1.17$ . Dans le cas d'un test unilatéral au seuil de 5%, on ne peut refuser  $H_0$ .

**Exercice 16** Dossier "pedago"

Lors d'une expérience pédagogique, on s'intéresse à l'effet et compare de deux pédagogies des mathématiques chez deux groupes de 10 sujets :

- { pédagogie traditionnelle ( $p_1$ )
- { pédagogie moderne ( $p_2$ )

On note la performance à une épreuve de combinatoire.

| $p_1$<br>traditionnelle |     |
|-------------------------|-----|
| s1                      | 5.0 |
| s2                      | 4.0 |
| s3                      | 1.5 |
| s4                      | 6.0 |
| s5                      | 3.0 |
| s6                      | 3.5 |
| s7                      | 3.0 |
| s8                      | 2.5 |
| s9                      | 1.5 |
| s10                     | 2.5 |

| $p_2$<br>moderne |     |
|------------------|-----|
| s11              | 4.0 |
| s12              | 5.5 |
| s13              | 4.5 |
| s14              | 6.5 |
| s15              | 4.5 |
| s16              | 5.5 |
| s17              | 1.0 |
| s18              | 2.0 |
| s19              | 4.5 |
| s20              | 4.5 |

1) Vérifier que les paramètres des deux échantillons sont donnés par :



|                    | $p_1$ | $p_2$ |
|--------------------|-------|-------|
| Moyenne            | 3.250 | 4.250 |
| Ecart-type         | 1.365 | 1.553 |
| Variance           | 1.863 | 2.413 |
| Ecart-type corrige | 1.439 | 1.637 |
| Variance corrige   | 2.069 | 2.681 |

2) Ces donnees experimentales permettent-elles d'admettre que la pedagogie a un effet sur les resultats a l'epreuve de combinatoire?

Réponse :  $t_{obs} = -1.45$ . Dans le cas d'un test unilatéral au seuil de 5%, on ne peut refuser  $H_0$ .

**Exercice 17**

On veut savoir si une maladie  $M$  modifie le taux de certaines proteines dans le sang. On a mesure leur concentration dans un echantillon de sujets atteints par  $M$  et dans un autre echantillon forme de sujets en bonne sante (sujets temoins). Les resultats (dans une unite convenable) sont les suivants :

|         | Echantillons | Moyenne echantillon | Variance echantillon |
|---------|--------------|---------------------|----------------------|
| Malades | 77           | 141                 | 40                   |
| Temoins | 33           | 131                 | 32                   |

Tester l'hypothese "taux identiques chez les malades et les temoins" contre l'hypothese :

a) "taux different chez les malades et les temoins",

b) "taux superieur chez les malades".

Réponses :  $z_{obs} = 8.094$ . Dans les deux cas,  $H_0$  est refusée.

**Exercice 18**

Dans une etude publiee en 1996, les auteurs se sont interesses au rôle de la valeur affective d'un texte dans la recuperation du souvenir chez les personnes âgées. L'experience a porte sur 20 sujets; 10 d'entre eux presentent un deficit mnésique, les 10 autres n'en presentent pas.

Dans un premier temps, on veut s'assurer que les deux groupes ainsi constitues :

- d'une part, sont homogenes du point de vue de l'âge

- d'autre part obtiennent des scores significativement differents au test "Wescher Memoire".

Les donnees relatives aux sujets des deux groupes figurent dans les tableaux ci-dessous.

| Sujets de citaires |     |                 |
|--------------------|-----|-----------------|
|                    | Age | Wescher Memoire |
| Sujet 1            | 80  | 66              |
| Sujet 2            | 91  | 59              |
| Sujet 3            | 82  | 84              |
| Sujet 4            | 87  | 68              |
| Sujet 5            | 82  | 80              |
| Sujet 6            | 85  | 75              |
| Sujet 7            | 84  | 72              |
| Sujet 8            | 85  | 82              |
| Sujet 9            | 88  | 78              |
| Sujet 10           | 87  | 76              |

| Sujets non de citaires |     |                 |
|------------------------|-----|-----------------|
|                        | Age | Wescher Memoire |
| Sujet 11               | 80  | 113             |
| Sujet 12               | 81  | 94              |
| Sujet 13               | 82  | 87              |
| Sujet 14               | 84  | 98              |
| Sujet 15               | 85  | 103             |
| Sujet 16               | 85  | 110             |
| Sujet 17               | 86  | 97              |
| Sujet 18               | 89  | 119             |
| Sujet 19               | 91  | 88              |
| Sujet 20               | 92  | 91              |

- 1) Calculer la moyenne et l'écart type des variables âge et Weschler memoire pour chacun des deux groupes.
- 2) Comparer les deux groupes du point de vue de l'âge a l'aide d'un test de comparaison de moyennes.
- 3) De même, comparer les deux groupes du point de vue de la seconde variable.

Réponses : 1) Pour la variable âge :  $\bar{x}_1 = 85.1$ ,  $\bar{x}_2 = 85.5$ ,  $s_1 = 3.11$ ,  $s_2 = 3.88$ . Pour la seconde variable,  $\bar{x}'_1 = 74$ ,  $\bar{x}'_2 = 100$ ,  $s'_1 = 7.42$ ,  $s'_2 = 10.40$ .

2) On réalise un test de comparaison de moyennes sur deux groupes indépendants. Compte tenu de la taille des échantillons, c'est la loi de Student qui s'applique. Ici,  $n_1 = n_2 = 10$  (groupes équilibrés);  $ddl = 18$ . Au seuil de 5% unilatéral,  $t_{crit} = 1.7341$ . On obtient ici  $t_{obs} = 0.24$ . On retient donc  $H_0$  et on conclut à l'homogénéité des âges dans les deux groupes.

3) Test analogue au précédent. On obtient ici  $t_{obs} = 6.10$ , ce qui est significatif d'une différence aux seuils traditionnels.

### Exercice 19

Le modèle de la mémorisation proposé par Craik et Lockhart (1972) stipule que le degré auquel un sujet se rappelle un matériel verbal est fonction du degré auquel ce matériel a été traité lors de sa présentation initiale. Eysenck (1974) voulait tester ce modèle et examiner s'il pouvait contribuer à expliquer certaines différences relevées entre des sujets jeunes et âgés concernant leur aptitude à se rappeler du matériel verbal. L'étude qu'il a menée incluait 50 sujets dont l'âge se situait entre 18 et 30 ans et 50 sujets compris dans la tranche d'âge 55-65 ans. Dans chacune des tranches d'âge, Eysenck a reparti les 50 sujets dans cinq groupes. Le premier devait lire une liste de mots et se contenter de compter le nombre de lettres de chacun d'eux. Le deuxième groupe devait lire chaque mot et lui trouver une rime. Le troisième groupe devait donner un adjectif qui aurait pu être utilisé pour modifier chaque mot de la liste. Le quatrième devait essayer de se former une image précise de chaque mot. Aucun de ces quatre groupes ne savait qu'il faudrait se rappeler les mots ultérieurement. Enfin, le cinquième groupe, ou groupe d'apprentissage intentionnel, devait lire la liste et mémoriser tous les mots. Après avoir passé trois fois en revue la liste de 27 mots, les sujets devaient retranscrire tous les mots dont ils se souvenaient. Le nombre de mots rappelés par chacun des 100 sujets est indiqué par le tableau 1 page 11.

- 1) On veut étudier chez les sujets âgés s'il existe une différence de performance entre le groupe 2 (traitement syntaxique) et le groupe 3 (traitement sémantique), en faveur de ce dernier. Le calcul permet d'obtenir les résultats de statistiques descriptives suivants :

|                    | Groupe 2 | Groupe 3 |
|--------------------|----------|----------|
| Moyenne            | 6.9      | 11.0     |
| Ecartif            | 10       | 10       |
| Ecart-type         | 2.02     | 2.37     |
| Ecart-type corrigé | 2.13     | 2.49     |

- 2) Étudier de même s'il existe une différence de performance due à l'âge parmi les sujets du groupe 2.

Réponses : 1) Il s'agit d'une comparaison de moyennes sur deux groupes indépendants. Avec les données fournies, on obtient  $t_{obs} = -3.80$  alors que, pour un test bilatéral au seuil de 5%, on obtient  $t_{crit} = 2.10$  ( $ddl = 18$ ). Il existe donc une différence significative entre le traitement syntaxique et le traitement sémantique.

|               | Gr. 1 | Gr. 2 | Gr. 3 | Gr. 4 | Gr. 5 |
|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Sujets âgés   | 9     | 7     | 11    | 12    | 10    |
|               | 8     | 9     | 13    | 11    | 19    |
|               | 6     | 6     | 8     | 16    | 14    |
|               | 8     | 6     | 6     | 11    | 5     |
|               | 10    | 6     | 14    | 9     | 10    |
|               | 4     | 11    | 11    | 23    | 11    |
|               | 6     | 6     | 13    | 12    | 14    |
|               | 5     | 3     | 13    | 10    | 15    |
|               | 7     | 8     | 10    | 19    | 11    |
|               | 7     | 7     | 11    | 11    | 11    |
| Sujets jeunes | 8     | 10    | 14    | 20    | 21    |
|               | 6     | 7     | 11    | 16    | 19    |
|               | 4     | 8     | 18    | 16    | 17    |
|               | 6     | 10    | 14    | 15    | 15    |
|               | 7     | 4     | 13    | 18    | 22    |
|               | 6     | 7     | 22    | 16    | 16    |
|               | 5     | 10    | 17    | 20    | 22    |
|               | 7     | 6     | 16    | 22    | 22    |
|               | 9     | 7     | 12    | 14    | 18    |
|               | 7     | 7     | 11    | 19    | 21    |

TAB. 1 { Donnees Eysenck

2) Les sujets du groupe 2 forment deux sous-groupes indépendants du point de vue de l'âge. On obtient  $t_{obs} = -0.766$ . La différence de performance n'est pas significative dans ce cas.

### Exercice 20

Deux groupes de seropositifs asymptomatiques ont été constitués sur la base d'une affectation au hasard des patients aux traitements. Le premier groupe, traité à l'aide d'un placebo, comprenait 428 personnes ; le second comprenait 453 personnes traitées par 500 mg/jour d'AZT. Après cinquante-cinq semaines de traitement, 33 personnes sous placebo sont tombées malades, contre seulement 11 dans le groupe AZT. *D'après Le Monde du 18 avril 1990.*

L'analyse statistique visera à répondre à la question : la prise de 500 mg/jour d'AZT retarde-t-elle l'apparition du sida ?

1) Calculer, pour chacun des deux groupes, la fréquence d'apparition de la maladie. Formuler une conclusion descriptive.

2) Comparer les fréquences d'apparition de la maladie dans les deux groupes à l'aide d'un test de comparaison de proportions au seuil de 1% unilatéral.

3) a) On considère les deux variables statistiques *groupe* (modalités : *Placebo* et *AZT*) et *apparition de la maladie* (modalités : *oui* et *non*). Dresser un tableau de contingence résumant les observations précédentes.

b) Comparer les groupes à l'aide d'un test du  $\chi^2$ , au seuil de 1%.

*Réponses :*

- 1) Les fréquences sont respectivement de  $f_1 = \frac{33}{428} = 7.7\%$  et  $f_2 = \frac{11}{453} = 2.4\%$ .  
 2) On obtient  $z_{obs} = 3.60$ . Les fréquences sont donc significativement différentes au seuil de 5% unilatéral ( $z_{crit} = 2.33$ ).  
 2) Le tableau de contingence, le tableau des effectifs théoriques et celui des contributions au  $\chi^2$  sont donnés par :

|       | Placébo | AZT | Total |
|-------|---------|-----|-------|
| oui   | 33      | 11  | 44    |
| non   | 395     | 442 | 837   |
| Total | 428     | 453 | 881   |

|     | Plac. | AZT   |
|-----|-------|-------|
| oui | 21.4  | 22.6  |
| non | 406.6 | 430.4 |

|     | Plac. | AZT  |
|-----|-------|------|
| oui | 6.28  | 5.95 |
| non | 0.33  | 0.31 |

Ainsi,  $\chi_{obs}^2 = 12.89$ . On peut affirmer, au seuil de 1%, l'existence d'une liaison entre le type de traitement et l'apparition de la maladie.

**Exercice 21**

Dans une etude devenue classique (1939), des chercheurs ont montre a des enfants noirs une poupee noire et une poupee blanche en leur demandant de choisir celle avec laquelle ils voudraient jouer. Sur 252 enfants, 169 ont choisi la poupee blanche tandis que 83 preferaient la poupee noire.

Un deuxieme groupe de recherche a reproduit l'experience precedente en 1970. Les etudes n'etaient pas exactement identiques, mais les resultats se sont averes interessants : sur 89 enfants noirs, 28 ont choisi la poupee blanche et 61 ont prefere la poupee noire.

Pour les deux etudes, un test adequat montre que les enfants ne choisissent pas la poupee au hasard.

Une troisieme equipe de chercheurs reunit les resultats precedents dans un tableau de contingence et procede a un test du  $\chi^2$  sur ce tableau :

|                | Exp. 1 | Exp. 2 |
|----------------|--------|--------|
| Poupee noire   | 83     | 61     |
| Poupee blanche | 169    | 28     |

Formuler avec precision l'hypothese nulle et l'hypothese alternative correspondant a ce test. Realiser le test et conclure.

*Réponses :* Les variables mises en jeu dans le tableau de contingence proposé sont d'une part la couleur de la poupée (noire ou blanche), d'autre part le numéro d'ordre de l'expérience (expérience 1 ou expérience 2). L'hypothèse correspondant au test du  $\chi^2$  est donc ici : le choix pour l'une ou l'autre des poupées dépend-il de l'expérience considérée ? ou encore : les deux expériences fournissent-elles des résultats identiques ? On trouve :  $\chi_{obs}^2 = 34.15$  ;  $ddl = 1$  ; pour  $\alpha = 5\%$ ,  $\chi_{crit}^2 = 3.84$  et donc les deux expériences fournissent des résultats différents.

**Exercice 22** Un debat televise est organise entre deux candidats a une election. Un sondage fait aupres d'un echantillon de 200 electeurs a eu lieu avant le debat ; 95 electeurs declaraient alors vouloir voter pour le candidat A.

Un autre sondage est e ectue apres le debat. Sur 150 electeurs interroges, 84 declarent alors vouloir voter pour le candidat A.

La proportion d'intentions de vote pour A a-t-elle ete in uencee par le debat ? Repondre a cette question a l'aide d'un test de comparaison de proportions au seuil de 5%.

*Réponse.* Il s'agit ici d'une comparaison de fréquences sur deux groupes independants. On trouve :  $f_1 = 0.475$ ,  $f_2 = 0.56$ ,  $p = 0.5114$ , d'où  $E = 0.054$  et  $z_{obs} = -1.57$ . Au seuil

de 5% pour un test unilatéral, on a :  $z_{crit} = -1.645$ . On n'a donc pas mis en évidence d'influence du débat sur les intentions de vote pour A.

**Exercice 23**  $\chi^2$  de MacNemar

Soit deux questions d'un test, A et B, auxquelles un groupe de 184 sujets a répondu. On voudrait savoir si la fréquence des réussites et des échecs est la même pour A et B. On a :

A : 99 échecs et 85 réussites

B : 64 échecs et 120 réussites.

On sait que 62 sujets ont répondu avec succès aux deux questions.

Justifier le tableau d'effectifs observés suivant :

|              |              |           |       |
|--------------|--------------|-----------|-------|
|              | B : réussite | B : échec | Total |
| A : réussite | 62           | 23        | 85    |
| A : échec    | 58           | 41        | 99    |
| Total        | 120          | 64        | 184   |

Pour répondre à cette question, le statisticien forme le tableau d'effectifs attendus suivant :

|              |              |           |
|--------------|--------------|-----------|
|              | B : réussite | B : échec |
| A : réussite | 62           | 40.5      |
| A : échec    | 40.5         | 41        |

Justifier la construction de ce tableau et comparer les deux distributions à l'aide de la distance du  $\chi^2$  et d'un test (le nombre de degrés de liberté est ici  $ddl = 1$ . Pourquoi?).

Vérifier que le  $\chi^2$  de MacNemar peut aussi être obtenu par la formule :

$$\chi^2 = \frac{(|\text{effectif d'une case} - \text{effectif de l'autre case}| - 1)^2}{\text{effectif d'une case} + \text{effectif de l'autre case}}$$

Réponses : Sans correction de Yates, on obtient :  $\chi_{obs}^2 = 15.12$ . La différence est donc significative au seuil de 1%.

Avec la correction de Yates, on obtient :  $\chi_{obs}^2 = 14.27$ . En utilisant la formule indiquée ci-dessus, on obtient de même :  $\chi_{obs}^2 = 14.27$ .

**Exercice 24**

Lors d'une enquête par questionnaire relative au traitement de la violence dans les établissements scolaires, un groupe de parents est interrogé avant et après la projection d'un film illustrant ce problème. Au total, 45 personnes ont fourni des réponses. On remarque que, avant la projection, 29 personnes pensaient que ces différents cultes devaient être traités en rendant plus sévère le règlement de l'établissement alors que les autres préconisaient des aides individualisées aux élèves concernés. Après la projection, on trouve 18 personnes qui préfèrent une solution de type réglementaire dont 14 avaient déjà cette opinion avant le film.

1) Dresser le tableau de contingence obtenu en croisant la condition (avant ou après la projection) et le type de solution préconisée.

2) L'opinion des sujets est-elle influencée par la projection du film? Répondre à cette question à l'aide d'un test de comparaison de proportions appariées, puis à l'aide d'un test du  $\chi^2$  de MacNemar, au seuil de 5% (on suppose l'échantillon de taille suffisante pour pouvoir appliquer les méthodes envisagées).

Réponses. 1)

|                  |           |                  |      |       |
|------------------|-----------|------------------|------|-------|
|                  |           | Après Projection |      |       |
|                  |           | Règlement        | Aide | Total |
| Avant projection | Règlement | 14               | 15   | 29    |
|                  | Aide      | 4                | 12   | 16    |
|                  | Total     | 18               | 27   | 45    |

Méthode des proportions appariées :  $Z = \frac{15-4}{\sqrt{15+4}} = 2.52$ . Pour un test bilatéral au seuil de 5%,  $z_{crit} = 1.96$ . L'opinion des sujets est donc influencée par la projection du film.

Méthode du  $\chi^2$  de Mac Nemar (avec correction de Yates) :  $\chi_{obs}^2 = \frac{(15-4-1)^2}{15+4} = 5.26$ ,  $ddl = 1$ ,  $\chi_{crit}^2 = 3.84$ , et la conclusion reste la même.

### Tests non paramétriques

**Exercice 25** Test du  $\chi^2$  sur un tableau de contingence.

Lors d'une enquête, on a interrogé 150 personnes prises au hasard sur leurs connaissances en langues étrangères. Les résultats obtenus sont les suivants :

|          | Hommes | Femmes |
|----------|--------|--------|
| Anglais  | 37     | 24     |
| Allemand | 9      | 19     |
| Espagnol | 16     | 15     |
| Aucune   | 20     | 10     |

Les connaissances en langues étrangères dépendent-elles du sexe dans la population dont est issu l'échantillon étudié ? On répondra à cette question en effectuant un test au seuil de 5%.

Réponses numériques :  $\chi_{obs}^2 = 8.48$ ,  $ddl = 3$ ,  $\chi_c^2 = 7.815$ . La différence entre les deux sexes est donc significative.

**Exercice 26** Dossier "Psymot"

On dispose des résultats de deux groupes à une épreuve de psycho-motricité, l'un des groupes ayant reçu une éducation particulière.

G1 : 38 34 18 45 5 1 21 22 11 7 52 24 93 17 56

G2 : 79 96 76 89 53 39 78 81 99 77 29 27.

1) a) Étudier, à l'aide d'un test de la médiane au seuil de 5%, si l'éducation a une influence sur les scores des sujets.

b) Que devient le résultat du test si l'on choisit un seuil de 1% ?

2) Reprendre la question précédente à l'aide d'un test de Wilcoxon Mann Whitney au seuil de 1% unilatéral.

Réponses : 1) La médiane de l'ensemble des observations est  $M = 39$ . Le tableau de contingence obtenu en croisant "position par rapport à la médiane" et "groupe" est le suivant :

|          | G1 | G2 | Tot. |
|----------|----|----|------|
| $\leq M$ | 11 | 3  | 14   |
| $> M$    | 4  | 9  | 13   |
| Tot.     | 15 | 12 | 27   |

On obtient :  $\chi_{obs}^2 = 6.24$ . Ce résultat est significatif d'une différence entre les groupes au seuil de 5%, mais n'est pas significatif au seuil de 1%.

2)  $\overline{R}_1 = 9.6$ ,  $\overline{R}_2 = 19.5$  et  $z_{obs} = -3.22$ . Au seuil de 1%, on refuse l'hypothèse  $H_0$ . C'est ici le groupe G2 qui a l'effectif le plus faible. Avec les notations de la table du test de Wilcoxon Mann Whitney, on a :  $W = 234$  et, au seuil de 1 %,  $W'_s = 216$ . On refuse donc  $H_0$ .

### Exercice 27

Deux enseignants se sont partagé un lot de 20 copies. L'enseignant A a corrigé  $n_1 = 8$  copies, l'enseignant B a corrigé  $n_2 = 12$  copies, d'où deux groupes de copies. On range les 20 copies par ordre de mérite. Les résultats sont les suivants :

Correcteur A : 2 4 5 7 9 10 12 17

Correcteur B : 1 3 6 8 11 13 14 15 16 18 19 20.

1) Calculer la moyenne des rangs des copies notées par chacun des correcteurs. Quelle conclusion peut-on formuler au niveau descriptif ?

2) A l'aide d'un test de Wilcoxon-Mann-Whitney, étudier si l'on peut conclure à l'hétérogénéité des deux groupes aux seuils traditionnels.

Réponses : 1) Noter que l'énoncé donne le protocole des rangs. On obtient :  $\overline{R}_1 = 8.25$ ,  $\overline{R}_2 = 12$  d'où, au niveau descriptif, une différence au bénéfice du correcteur B.

2) Avec les notations de la table du test de Wilcoxon Mann Whitney, on a :  $N_1 = 8$ ,  $N_2 = 12$ ,  $W = 66$  et, au seuil de 5 %,  $W_s = 62$ ,  $W'_s = 106$ . On accepte donc  $H_0$ .

### Exercice 28

On veut comparer les résultats de deux classes de même niveau scolaire en utilisant une épreuve commune de performances linguistiques. On obtient, selon le barème adopté, les résultats suivants :

Classe A : 41, 49, 14, 81, 18, 54, 95, 13, 38, 15, 5, 17, 25, 96, 8.

Classe B : 80, 96, 86, 99, 89, 32, 7, 49, 98, 12, 67, 46, 26, 18, 80.

1) Effectuer un test de la médiane à  $n$  de déterminer si les deux classes obtiennent des résultats comparables (seuil 5%).

2) Reprendre le problème à l'aide d'un test de Wilcoxon Mann Whitney.

Réponses : 1)  $\chi_{obs}^2 = 3.33$ , au seuil de 5%,  $\chi_{crit}^2 = 3.84$ . On accepte donc  $H_0$ .

2) On a ici :  $\sum R_A = 192.5$ ,  $\sum R_B = 272.5$ ,  $N_1 = N_2 = 15$  d'où  $Z_{obs} = 1.6591$ . Pour un seuil de 5% unilatéral, on a :  $Z_{crit} = 1.645$ . On accepte donc l'hypothèse  $H_1$  d'une différence entre les deux groupes, au bénéfice de la c. On accepte donc

binomiale de paramètres  $p = 0.5$  et  $N = 15$ , on a :  $P(X \leq 1) = 0.00048$ . Sous l'hypothèse  $H_0$ , on a moins de 5 chances sur 10000 d'observer un échantillon aussi extrême. On accepte donc  $H_1$ .

Test de Wilcoxon :  $N = 15$ ,  $T_+ = 118$ ,  $T_- = 2$ . D'après la table, on a, au seuil de 1%,  $T_{m,crit} = 19$ . On accepte donc  $H_1$ .

### Exercice 30

Nurcombe et *al.* ont mené en 1984 une étude sur les enfants présentant un poids réduit à la naissance (PRN). Ces enfants posent des problèmes particuliers à leurs parents parce qu'ils sont, en apparence, apathiques et imprévisibles; en outre, ils risquent de connaître des problèmes physiques et comportementaux. L'étude a porté sur trois groupes d'enfants;

- { Un groupe expérimental de 25 enfants PRN dont les mères bénéficiaient d'un apprentissage particulier : elles étaient sensibilisées aux signaux émis par ces enfants, afin de leur permettre de mieux répondre à leurs besoins;
- { Un groupe témoin de 31 enfants PRN dont les mères ne bénéficiaient d'aucun programme particulier;
- { Un groupe d'enfants dont le poids à la naissance était normal.

Le tableau 2 page 17 représente une partie des données observées. Il indique l'indice de développement mental (IDM) à 6 mois et à 24 mois pour le groupe témoin PRN, ainsi que la différence entre les deux indices.

1) Des travaux antérieurs sur de tels enfants laissent penser que les scores IDM des enfants PRN du groupe témoin pouvaient diminuer de façon sensible entre 6 et 24 mois. Réaliser un test de comparaison de moyennes afin de déterminer si les données observées confirment cette hypothèse (choisir un seuil de 5%).

2) Peu satisfait du résultat obtenu à la question 1, un chercheur souhaite comparer les données relatives aux enfants du groupe témoin PRN à l'aide d'un test du signe. Réaliser le test et conclure.



| PRN Temoin   |          |          |          |
|--------------|----------|----------|----------|
|              | IDM-6    | IDM-24   | Di       |
| s1           | 124      | 114      | -10      |
| s2           | 94       | 88       | -6       |
| s3           | 115      | 102      | -13      |
| s4           | 110      | 127      | 17       |
| s5           | 116      | 104      | -12      |
| s6           | 139      | 104      | -35      |
| s7           | 116      | 91       | -25      |
| s8           | 110      | 96       | -14      |
| s9           | 129      | 104      | -25      |
| s10          | 120      | 106      | -14      |
| s11          | 105      | 91       | -14      |
| s12          | 88       | 102      | 14       |
| s13          | 120      | 104      | -16      |
| s14          | 120      | 100      | -20      |
| s15          | 116      | 114      | -2       |
| s16          | 105      | 109      | 4        |
| s17          | 100      | 109      | 9        |
| s18          | 91       | 119      | 28       |
| s19          | 129      | 91       | -38      |
| s20          | 84       | 81       | -3       |
| s21          | 91       | 114      | 23       |
| s22          | 116      | 119      | 3        |
| s23          | 100      | 102      | 2        |
| s24          | 113      | 111      | -2       |
| s25          | 89       | 80       | -9       |
| s26          | 102      | 119      | 17       |
| s27          | 110      | 119      | 9        |
| s28          | 116      | 123      | 7        |
| s29          | 124      | 119      | -5       |
| s30          | 126      | 114      | -12      |
| s31          | 123      | 132      | 9        |
| Moyenne      | 111.00   | 106.71   | -4.29    |
| Var. corrige | 191.8667 | 167.8129 | 257.2129 |

TAB. 2 { Donnees PRN-Temoin

Réponses : 1) Soit  $\mu_6$  et  $\mu_{24}$  les moyennes de l'IDM à 6 mois et à 24 mois dans la population dont est issu l'échantillon. L'hypothèse de recherche se traduit par les hypothèses statistiques suivantes :

$$H_0 : \mu_6 = \mu_{24}$$

$$H_1 : \mu_6 > \mu_{24}$$

Il s'agit d'un test de comparaison de moyennes sur des groupes appariés. La statistique de test est  $t = \frac{\bar{d}}{E}$  avec  $E^2 = \frac{s_c^2}{n}$ . Compte tenu de l'effectif ( $n = 31$ ), on peut utiliser ici une loi de Student avec 30 ddl ou une loi normale. Pour un seuil de 5% (et un test unilatéral avec la zone de rejet "à gauche"), on obtient  $t_{crit} = -1.70$  (ou  $z_{crit} = -1.65$ ). On obtient :  $E^2 = \frac{257.21}{31} = 8.30$  ;  $E = \sqrt{8.30} = 2.88$  ;  $t_{obs} = \frac{-4.29}{2.88} = -1.49$ . L'hypothèse  $H_0$  est donc retenue : l'hypothèse d'une baisse de l'IDM n'a pas été démontrée.

2) Les hypothèses statistiques s'expriment ici par :

$H_0$  : Autant de différences positives que de différences négatives dans la population.

$H_1$  : Dans la population parente, la fréquence des différences négatives est supérieure à 50%.

Comme  $N > 30$ , on peut utiliser l'approximation de la loi binomiale par une loi normale et prendre comme statistique de test :  $Z = \frac{2D - 1 - N}{\sqrt{N}}$  où  $D = \max(D_+, D_-)$ . Pour un seuil de 5%, on obtient  $z_{crit} = 1.65$ . On a ici 12 différences positives pour 19 différences négatives, d'où :  $z_{obs} = \frac{38 - 1 - 31}{\sqrt{31}} = 1.07$ . On accepte donc l'hypothèse  $H_0$ , ce qui confirme le résultat de la question 1.

**Exercice 31**

Dans une recherche medicale, on a examine 15 patients atteints de la maladie de Parkinson, dans deux conditions : a jeun et sous medicament L-Dopa. Les resultats ont permis d'etablir, pour la variable *Vitesse de la marche*, le protocole suivant des e ets individuels.

| Sujet | E et  | Sujet | E et  | Sujet | E et  |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| s1    | +0,23 | s6    | +0,12 | s11   | +0,30 |
| s2    | +0,32 | s7    | +0,33 | s12   | +0,10 |
| s3    | +0,04 | s8    | +0,28 | s13   | -0,12 |
| s4    | +0,19 | s9    | 0,00  | s14   | +0,15 |
| s5    | +0,22 | s10   | +0,12 | s15   | +0,09 |

Ordonner le protocole des e ets individuels et construire le protocole des rangs. L'observation correspondant a un e et nul ne sera pas prise en compte.

Proceder a un test d'homogene•te des rangs de Wilcoxon et formuler une conclusion en termes d'e et du medicament (seuil : 5% unilatéral).

Réponse :  $T_- = 5$ ,  $T_+ = 100$ . Avec les notations de la table du test de Wilcoxon, on a :  $N = 14$ ,  $T_m = 5$ . Or, au seuil de 5% unilatéral,  $T_{m,crit} = 25$ . On accepte l'hypothèse alternative au seuil de 5% unilatéral.

**Exercice 32**

On etudie les comportements agressifs d'un groupe d'enfants ayant des di cultes de comportement, pendant une demi-journee, avant et apres la projection d'un lm d'aventures. Peut-on dire que ce lm a eu une in uence sur le comportement agressif des enfants? (on trouvera dans le tableau 3 page 19 trois colonnes indiquant le numero du sujet, le

nombre de comportements agressifs avant la projection et le nombre de comportements agressifs apres la projection). Apporter une reponse a la question posee en utilisant un

| Sujet | Avant | Apres | Sujet | Avant | Apres |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1     | 46    | 71    | 14    | 84    | 35    |
| 2     | 31    | 79    | 15    | 2     | 28    |
| 3     | 65    | 27    | 16    | 5     | 39    |
| 4     | 61    | 39    | 17    | 99    | 53    |
| 5     | 47    | 75    | 18    | 88    | 66    |
| 6     | 32    | 28    | 19    | 75    | 40    |
| 7     | 58    | 32    | 20    | 71    | 84    |
| 8     | 14    | 36    | 21    | 23    | 14    |
| 9     | 7     | 61    | 22    | 84    | 15    |
| 10    | 48    | 83    | 23    | 2     | 99    |
| 11    | 43    | 80    | 24    | 34    | 36    |
| 12    | 33    | 28    | 25    | 92    | 13    |
| 13    | 14    | 72    | 26    | 61    | 87    |

TAB. 3 { Comportements agressifs

test de Wilcoxon.

*Réponse :  $T = T_- = 194.5$ ,  $z_{obs} = 0.47$ . On ne peut pas refuser l'hypothèse nulle.*

*En utilisant la table du test de Wilcoxon, on a :  $N = 26$ ,  $T_{min} = T_+ = 156.5$  et, au seuil de 5% unilatéral,  $T_{m,crit} = 110$ . On ne peut donc pas refuser  $H_0$ .*

**Exercice 33**

Dans une creche, on a observe des enfants en presence de deux puericultrices differentes ; on a compte, suivant une grille prealablement etablie, le nombre de comportements verbaux de ces enfants, pendant une periode determinee. Les resultats sont donnees dans les tableaux suivants. Peut-on dire qu'il y a une difference de comportements verbaux entre les deux observations ?

| Séance 1 | Séance 2 | Diff. | Rang- | Rang+ |
|----------|----------|-------|-------|-------|
| 64       | 88       | 24    |       | 17    |
| 62       | 42       | -20   | 11    |       |
| 10       | 65       | 55    |       | 24    |
| 61       | 87       | 26    |       | 19    |
| 17       | 9        | -8    | 5,5   |       |
| 20       | 28       | 8     |       | 5,5   |
| 65       | 87       | 22    |       | 13    |
| 10       | 78       | 68    |       | 27    |
| 67       | 9        | -58   | 25    |       |
| 25       | 58       | 33    |       | 22    |
| 1        | 92       | 91    |       | 30    |
| 42       | 36       | -6    | 4     |       |
| 90       | 66       | -24   | 17    |       |
| 87       | 22       | -65   | 26    |       |
| 93       | 4        | -89   | 29    |       |

| Séance 1 | Séance 2 | Diff. | Rang- | Rang+ |
|----------|----------|-------|-------|-------|
| 16       | 39       | 23    |       | 14,5  |
| 16       | 66       | 50    |       | 23    |
| 83       | 70       | -13   | 8     |       |
| 45       | 13       | -32   | 20,5  |       |
| 33       | 10       | -23   | 14,5  |       |
| 21       | 10       | -11   | 7     |       |
| 30       | 54       | 24    |       | 17    |
| 67       | 50       | -17   | 10    |       |
| 34       | 2        | -32   | 20,5  |       |
| 93       | 10       | -83   | 28    |       |
| 78       | 73       | -5    | 2,5   |       |
| 63       | 42       | -21   | 12    |       |
| 49       | 65       | 16    |       | 9     |
| 71       | 73       | 2     |       | 1     |
| 93       | 98       | 5     |       | 2,5   |

Repondre a la question posee a l'aide d'un test des signes puis d'un test de Wilcoxon.

Réponses : Test des signes :  $D = D_- = 16$ ,  $z_{obs} = 0.18$ . On ne peut pas refuser l'hypothèse nulle.

Test de Wilcoxon :  $T_- = 240.5$ ,  $z_{obs} = 0.15$ . Même conclusion.

Avec les notations de la table du test de Wilcoxon :  $N = 30$ ,  $T_{min} = T_+ = 224.5$ . Au seuil de 5% unilatéral,  $T_{m,crit} = 151$ . On accepte donc  $H_0$ .