Analyse de Variance à un facteur

Exemple introductif : Test commun à trois groupes d'élèves. Moyennes observées dans les trois groupes : $\overline{x}_1 = 8$, $\overline{x}_2 = 10$,$\overline{x}_3 = 12$.

Question : s'agit-il d'élèves "tirés au hasard" ou de groupes de niveau ?

Première situation :

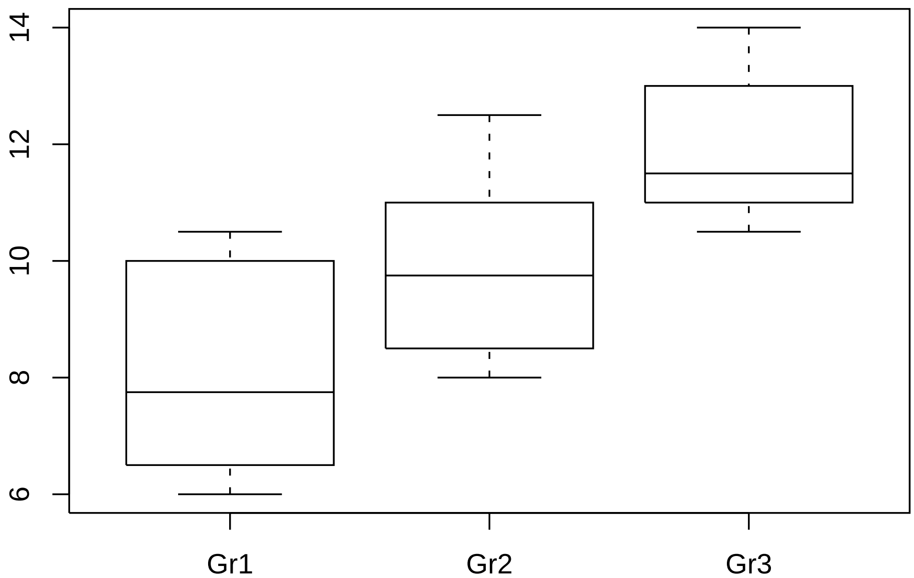
	Gr1	Gr2	Gr3
	6	8	10.5
	6.5	8.5	10.5
	6.5	8.5	11
	7	9	11
	7.5	9.5	11
	8	10	12
	8	11	13
	10	11	13
	10	12	14
	10.5	12.5	14
$\overline{x}_i$	8	10	12

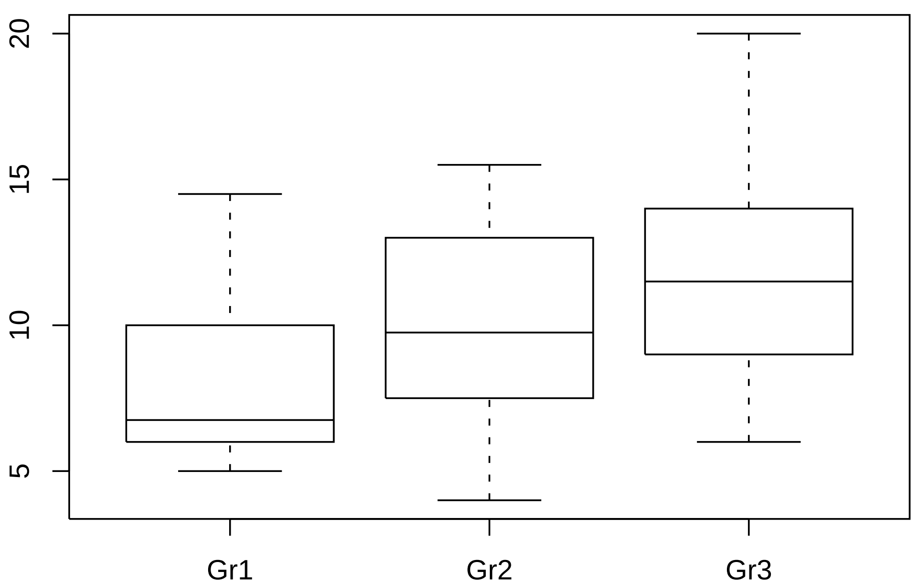
Deuxième situation :

	Gr1	Gr2	Gr3
	5	4	6
	5.5	5.5	7
	6	7.5	9
	6	9	10
	6.5	9.5	11
	7	10	12
	7.5	11	13
	10	13	14
	12	15	18
	14.5	15.5	20
$\overline{x}_i$	8	10	12

Démarche utilisée : nous comparons la dispersion des moyennes (8, 10, 12) à la dispersion à l'intérieur de chaque groupe.

Boîtes à moustaches pour les deux situations proposées





Comparer a moyennes sur des groupes indépendants

Plan d'expérience : $\mathcal{S} < \mathcal{A}_a >$

Une variable $\mathcal{A}$, de modalités $A_1, A_2, \ldots, A_a$ définit a groupes indépendants.

Variable dépendante X mesurée sur chaque sujet.
x_{ij} : valeur observée sur le i-ème sujet du groupe j.

Problème : La variable X a-t-elle la même moyenne dans chacune des sous-populations dont les groupes sont issus ?

Hypothèses "a priori" :
– distribution normale de X dans chacun des groupes
– Egalité des variances dans les populations.

Hypothèses du test :

H_0 : $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_a$
H_1 : Les moyennes ne sont pas toutes égales.

Exemple :

15 sujets évaluent 3 couvertures de magazine. Sont-elles équivalentes ?

	C1	C2	C3	
	14	16	14	
	6	14	16	
	12	8	14	
	10	8	14	
	8	14	12	
$\overline{x}_i$	10	12	14	12

Variation (ou somme des carrés) totale :

$SC_T = (14-12)^2 + (6-12)^2 + \ldots + (12-12)^2 = 144$

Décomposition de la variation totale :

Score d'un sujet = Moyenne de son groupe + Ecart

C1	C2	C3
10	12	14
10	12	14
10	12	14
10	12	14
10	12	14

C1	C2	C3
4	4	0
-4	2	2
2	-4	0
0	-4	0
-2	2	-2

Variation (ou somme des carrés) inter-groupes :

$SC_{inter} = (10-12)^2 + (10-12)^2 + \ldots + (14-12)^2 = 40$

Variation (ou somme des carrés) intra-groupes :

$$SC_{intra} = 4^2 + (-4)^2 + \ldots + (-2)^2 = 104$$

Calcul des carrés moyens :

$$CM_{inter} = \frac{SC_{inter}}{a-1} = 20 \;;\; CM_{intra} = \frac{SC_{intra}}{N-a} = 8.67$$

Statistique de test :

$$F_{obs} = \frac{CM_{inter}}{CM_{intra}} = 2.31$$

F suit une loi de Fisher avec $ddl_1 = a - 1 = 2$ et $ddl_2 = N - a = 12$.

Résultats

Source	Somme carrés	ddl	Carré Moyen	F
$\mathcal{C}$	40	2	20	2.31
Résid.	104	12	8.67	
Total	144	14		

Pour α=5%, $F_{crit} = 3.88$: H_0 est acceptée

Formules de calcul pour un calcul "à la main" efficace

Construction de la statistique de test :

Notations :
n_1, n_2, ..., n_a : effectifs des groupes.
N : effectif total
$T_{\cdot 1}$, ..., $T_{\cdot a}$: sommes des observations pour chacun des groupes.
$T_{\cdot\cdot}$ ou T_G : somme de toutes les observations.

Somme des carrés totale ou variation totale :

$$SC_T = \sum_{i,j} x_{ij}^2 - \frac{T_G^2}{N}$$

Elle se décompose en une variation "intra-groupes" et une variation "inter-groupes" :

$SC_T = SC_{inter} + SC_{intra}$ avec :

$$SC_{inter} = \sum_{j=1}^{a} \frac{T_{\cdot j}^2}{n_j} - \frac{T_G^2}{N}$$

$$SC_{intra} = \sum_{i,j} x_{ij}^2 - \sum_{j=1}^{a} \frac{T_{\cdot j}^2}{n_j}$$

Carrés moyens :

$$CM_{inter} = \frac{SC_{inter}}{a-1} \quad ; \quad CM_{intra} = \frac{SC_{intra}}{N-a}$$

Statistique de test :

$$F = \frac{CM_{inter}}{CM_{intra}}$$

F suit une loi de Fisher à $(a-1)$ et $(N-a)$ ddl.

Présentation des résultats

Source de variation	SC	ddl	CM	F
$\mathcal{A}$ (inter-groupes)	SC_{inter}	$a-1$	CM_{inter}	F_{obs}
Résiduelle (intra-gr.)	SC_{intra}	$N-a$	CM_{intra}	
Total	SC_T	$N-1$		

Organisation des calculs

$i \; j$	1	2	3	Total
1	x_{11}			
...	...	...	...	
$T_{\cdot j}$	$T_{\cdot 1}$			T_G
$T_{\cdot j}^2$				
n_j				N
$\frac{T_{\cdot j}^2}{n_j}$				
$\sum x_{ij}^2$				

Remarques

– SC_{inter} : c'est la somme des carrés (totale) que l'on obtiendrait si toutes les observations d'un groupe étaient égales à la moyenne de ce groupe.
CM_{inter} : variance corrigée de cet ensemble de données.

– SC_{intra} : c'est la somme des carrés (totale) que l'on obtiendrait en "décalant" chaque observation de façon à avoir la même moyenne dans chaque groupe.
CM_{intra} : "moyenne pondérée" des trois variances corrigées ainsi obtenues.

– Si 2 groupes, équivaut à un T de Student. $F = T^2$

Pour les deux situations proposées en introduction :

Situation 1

Analysis of Variance Table

Response : x1

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
group	2	80.000	40.000	17.008	1.659e-05 ***
Residuals	27	63.500	2.352		

Situation 2

Analysis of Variance Table

Response : x2

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
group	2	80.00	40.00	2.7136	0.08436 .
Residuals	27	398.00	14.74		

Tests non paramétriques

Paramètres : moyenne, variance, covariance, etc ;

Les tests tels que t de Student, ANOVA, etc sont des tests paramétriques :

– hypothèses relatives à un paramètre des populations parentes
– nécessité d'estimer un ou plusieurs paramètres de la distribution parente à l'aide des échantillons observés
– conditions d'application liées à la forme des distributions parentes

Il existe également des tests *non paramétriques* ou indépendants de toute distribution.

– pas de condition d'application
– peu affectés par la présence d'un ou plusieurs scores extrêmes
– ils ont en général une plus faible puissance que les tests paramétriques correspondants

Tests non paramétriques sur deux groupes indépendants

Situation envisagée : un plan $\mathcal{S} < \mathcal{A}_2 >$ avec un facteur $\mathcal{A}$ à 2 niveaux définissant deux groupes indépendants et une variable dépendante X ordinale ou numérique

Effectifs des deux groupes : n_1 et n_2.

Test de la médiane

Hypothèses

H_0 : Les deux populations parentes ont même médiane.
H_1 : Les deux populations parentes ont des médianes différentes

Construction de la statistique de test

On détermine la médiane M de la série obtenue en réunissant les deux échantillons.

On constitue un tableau de contingence en croisant la variable indépendante et la variable dérivée “position par rapport à M”

	Gr 1	Gr 2	Ensemble
$\leq M$	$N_{1\,1}$	$N_{1\,2}$	$N_{1.}$
$> M$	$N_{2\,1}$	$N_{2\,2}$	$N_{2.}$
Total	$N_{.1}$	$N_{.2}$	$N_{..}$

On fait un test du χ^2 sur le tableau obtenu.

Condition d’application (selon Siegel et Castellan) : le nombre total d’observations doit être supérieur à 20.

Test bilatéral de Kolmogorov-Smirnov

H_0 : La distribution de la VD est la même dans les deux populations parentes
H_1 : Les distributions sont différentes

Construction de la statistique de test

Soient n_1 et n_2 les tailles des deux échantillons.

On choisit un regroupement en classes : $b_1, b_2, \ldots, b_k$

On construit le tableau des fréquences cumulées dans les deux groupes :

	Gr 1	Gr 2
$X \leq b_1$	F_{11}	F_{12}
$X \leq b_2$	F_{21}	F_{22}
...	...	...
$X \leq b_k$	F_{k1}	F_{k2}

On calcule :

$$D = \max |F_{i1} - F_{i2}|$$

Pour $n_1 \leq 25$ ou $n_2 \leq 25$, les valeurs critiques de $J = n_1 n_2 D$ sont tabulées.

Pour de grands échantillons ($n_1 > 25$ et $n_2 > 25$), la valeur D_{crit} peut être calculée par la formule :

$$D_{crit} = \lambda \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}$$

où λ est une constante dépendant du seuil choisi :

seuil	0.10	0.05	0.01	0.001
λ	1.22	1.36	1.63	1.95

Test unilatéral de Kolmogorov-Smirnov

H_0 : La distribution de la VD est la même dans les deux populations parentes
H_1 : L'intensité de la VD est plus forte dans le groupe 2

Construction de la statistique de test

Soient n_1 et n_2 les tailles des deux échantillons.

On choisit un regroupement en classes : $b_1, b_2, \ldots, b_k$

On construit le tableau des fréquences cumulées dans les deux groupes :

	Gr 1	Gr 2
$X \leq b_1$	F_{11}	F_{12}
$X \leq b_2$	F_{21}	F_{22}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$X \leq b_k$	F_{k1}	F_{k2}

On calcule le maximum des différences, ordonnées en fonction du sens du test :

$$D = \max\left[F_{i1} - F_{i2}\right]$$

Pour $n_1 \leq 25$ ou $n_2 \leq 25$, les valeurs critiques de $J = n_1 n_2 D$ sont tabulées.

Pour de grands échantillons ($n_1 > 25$ ou $n_2 > 25$), on utilise l'approximation suivante : sous H_0, la statistique :

$$\chi^2 = 4D^2 \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}$$

suit une loi du χ^2 à 2 ddl.

Exemple

Apprentissage séquentiel par des élèves du 11è grade et des élèves du 7è grade.

Hypothèse : la matière apprise au début de la série est rappelée plus efficacement, mais cet effet est moins prononcé chez les sujets jeunes.

Variable dépendante : pourcentage d'erreurs commises sur la première partie de la série.

On fait ici un test unilatéral. L'hypothèse H_1 est : le pourcentage d'erreurs est significativement plus élevé dans le 2è groupe.

Données :

11è grade	7è grade
35.2	39.1
39.2	41.2
40.9	46.2
38.1	48.4
34.4	48.7
29.1	55.0
41.8	40.6
24.3	52.1
32.4	47.2
	45.2

Découpage en classes et fréquences cumulées :

	11è grade	7è grade	Diff.
$X \leq 28$	0.111	0	0.111
$X \leq 32$	0.222	0	0.222
$X \leq 36$	0.556	0	0.555
$X \leq 40$	0.778	0.1	0.678
$X \leq 44$	1	0.3	0.700
$X \leq 48$	1	0.6	0.400
$X \leq 52$	1	0.8	0.200
$X \leq 56$	1	1	0

On obtient : $D = 0.7$ d'où $J = 9 \times 10 \times 0.7 = 63$.

Au seuil de 1%, la table indique : $J_{crit} = 61$.

On conclut donc sur H_1.

Test de Wald-Wolfowitz

H_0 : L'appartenance d'une observation à l'un ou l'autre groupe est indépendante de son rang.
H_1 bilatérale : L'appartenance d'une observation à l'un ou l'autre groupe dépend de son rang.
H_1 unilatérale à gauche : Etant donné deux observations consécutives, la probabilité qu'elles appartiennent au même groupe est supérieure à celle résultant du hasard.
H_1 unilatérale à droite : L'alternance entre les observations de l'un et l'autre groupe est trop élevée pour être due au hasard.

Méthode : on classe toutes les observations par ordre croissant. On construit un compteur démarrant à 1, et qui augmente d'une unité chaque fois que l'on change de groupe en parcourant la liste ordonnée. On obtient ainsi le nombre de "runs" u.

Exemple : On a fait passer une épreuve à 31 sujets, 14 hommes et 17 femmes. Le protocole des rangs observé est le suivant :

Hommes : 1 2 3 7 8 9 10 13 14 15 23 24 26 27
Femmes : 4 5 6 11 12 16 17 18 19 20 21 22 25 28 29 30 31

Détermination du nombre de "runs" :

```
MMM FFF MMMM FF MMM FFFFFFF MM F MM FFFF
111 222 3333 44 555 6666666 77 8 99 0000
```

Ici : $u = 10$.

Pour $n_1 \leq 10$ ou $n_2 \leq 10$, on utilise des tables spécialisées.

Pour $n_1 > 10$ et $n_2 > 10$, on utilise l'approximation par une loi normale :

$$\mu = \frac{2n_1n_2}{n_1 + n_2} + 1 \quad \sigma^2 = \frac{2n_1n_2(2n_1n_2 - n_1 - n_2)}{(n_1 + n_2)^2(n_1 + n_2 - 1)}$$

$$Z = \frac{u - \mu \pm 0.5}{\sigma}$$

N.B. ± 0.5 est une correction de continuité. Le signe doit être choisi de façon diminuer la valeur de $|Z|$.

Ici : $\mu = 16.35$ $\sigma^2 = 7.35$ $Z = -2.16$

Remarque : Ce test suppose l'absence d'ex-aequo.

Test U de Mann-Whitney - Test de Wilcoxon Mann Whitney

H_0 : La probabilité qu'un score provenant de la première population soit supérieur à un score provenant de la seconde est 0.5
H_1 : Cette probabilité est différente de 0.5 (hypothèse bilatérale), inférieure à 0.5, supérieure à 0.5 (hypothèses unilatérales)

Méthode : On construit le protocole des rangs pour l'ensemble des $(n_1 + n_2)$ observations (avec la convention du rang moyen pour les ex-aequos).

W_1 : somme des rangs du premier échantillon
W_2 : somme des rangs du deuxième échantillon.

Pour $n_1 \leq 10$ ou $n_2 \leq 10$, on utilise des tables spécialisées.

Si $n_1 > 10$ et $n_2 > 10$, ou si l'un des deux effectifs est supérieur à 12, on utilise l'approximation par une loi normale :

Test U de Mann-Whitney proprement dit (cf. Statistica) :
On calcule :

$$U_1 = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - W_1$$

$$U_2 = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2+1)}{2} - W_2$$

$$U = \min(U_1, U_2)$$

$$Z = \frac{U - \frac{n_1 n_2}{2}}{E} \quad \text{avec} \quad E^2 = \frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}$$

Variante : On calcule les rangs moyens dans les deux groupes $\overline{R_1}$ et $\overline{R_2}$ puis la statistique :

$$Z = \frac{\overline{R_1} - \overline{R_2}}{E} \text{ avec } E^2 = \frac{(n_1 + n_2 + 1)\,(n_1 + n_2)^2}{12 n_1 n_2}$$

Remarques.

1. Dans le test de Mann-Whitney, la variable X est supposée continue. La probabilité d'observer des ex-aequo est donc *en théorie* nulle. Cependant, certains auteurs ont proposé des formules correctives pour tenir compte des ex-aequo.

2. Certains auteurs proposent une formule comportant une correction de continuité.

3. Un test analogue : le test de permutation des rangs de Wilcoxon.

4. Le test de Mann Whitney permet notamment de tester l'égalité des médianes, *à condition que les variances des distributions soient égales*. Un autre test (test des rangs robuste) permet de s'affranchir de cette dernière condition.

Tests non paramétriques sur k groupes indépendants

Situation envisagée : un plan $\mathcal{S} < \mathcal{A}_k >$ avec un facteur $\mathcal{A}$ à k niveaux définissant k groupes indépendants et une variable dépendante X ordinale ou numérique

Effectifs des groupes : $n_1, n_2, \ldots, n_k$.

Test de la médiane

Le test de la médiane peut encore être utilisé dans cette situation.

Test de Kruskal-Wallis

H_0 : La probabilité qu'un score provenant de l'une des populations soit supérieur à un score provenant d'une autre population est 0.5
H_1 : Cette probabilité est différente de 0.5

Méthode : On construit le protocole des rangs pour l'ensemble des observations.

Soit $\overline{R}_j$ la moyenne des rangs dans le groupe j, N le nombre total d'observations et $\overline{R} = \frac{N+1}{2}$ le rang moyen général.

Statistique de test :

$$K = \frac{12}{N(N+1)} \sum n_j (\overline{R}_j - \overline{R})^2$$

ou

$$K = \left[\frac{12}{N(N+1)} \sum n_j \overline{R}_j^2 \right] - 3(N+1)$$

Si le nombre de groupes est supérieur à 3 et le nombre d'observations dans chaque groupe est supérieur à 5, K suit approximativement une loi du χ^2 à $(k-1) ddl$.

Exemple : 12 sujets soumis à 3 conditions différentes. On fait l'hypothèse que les sujets du 3è groupe auront un score significativement supérieur.

Valeurs observées de la variable dépendante :

G_1	G_2	G_3
.994	.795	.940
.872	.884	.979
.349	.816	.949
	.981	.890
		.978

Protocole des rangs et calcul des rangs moyens :

	G_1	G_2	G_3
	12	2	7
	4	5	10
	1	3	8
		11	6
			9
R_j	17	21	40
$\overline{R}_j$	5.67	5.25	8

On obtient ici :

$$K = \frac{12}{12 \times 13}\left[3(5.67)^2 + 4(5.25)^2 + 5(8)^2\right] - 3(12+1)$$

c'est-à-dire $K = 1.51$. Pour $\alpha = 5\%$, la table donne : $K_{crit} = 5.63$. On retient donc H_0.

Tests non paramétriques sur 2 groupes appareillés

Situation envisagée : un plan $\mathcal{S} * \mathcal{A}_2$ avec un facteur $\mathcal{A}$ à 2 niveaux définissant deux groupes appareillés et une variable dépendante X ordinale ou numérique.

Effectif de l'échantillon de sujets : n.

Test du χ^2 de Mac Nemar

Il s'applique au cas où la variable X est dichotomique.

Situation générale :

		A_1	
		$X = 1$	$X = 0$
A_2	$X = 1$	a	c
	$X = 0$	b	d

Les paires discordantes sont les observations ($X = 1$ en A_1, $X = 0$ en A_2) et ($X = 0$ en A_1, $X = 1$ en A_2) L'information utile est alors fournie par les effectifs "de discordance" b et c.

Notations
p_1 : fréquence de la combinaison ($X = 1$ en A_1, $X = 0$ en A_2) par rapport à la discordance totale dans la population.
p_2 : fréquence de la combinaison ($X = 0$ en A_1, $X = 1$ en A_2) par rapport à la discordance totale dans la population.

Hypothèses du test
$H_0 : p_1 = p_2 (= 50\%)$
$H_1 : p_1 \neq p_2$

Statistique de test

$$\chi^2 = \frac{(b-c)^2}{b+c}, \quad ddl = 1$$

ou, avec la correction de Yates (petits effectifs) :

$$\chi^2 = \frac{(|b-c|-1)^2}{b+c}, \quad ddl = 1$$

Condition d'application : $b + c > 10$.

Remarques.

1. Cette statistique est la distance du χ^2 calculée entre le tableau d'effectifs observés et le tableau d'effectifs théoriques suivant :

		A_1	
		$X = 1$	$X = 0$
A_2	$X = 1$	a	$\frac{b+c}{2}$
	$X = 0$	$\frac{b+c}{2}$	d

2. On peut aussi utiliser la statistique suivante, qui permet éventuellement un test unilatéral :

$$Z = \frac{b - c \pm 1}{\sqrt{b+c}}$$

Z suit la loi normale centrée réduite.
Correction de continuité (± 1) : choisir le signe de façon à diminuer la valeur absolue de la statistique.

Tests des permutations

Principe : on observe un protocole de différences individuelles d_i. On observe D_+ différences positives et D_- différences négatives. On élimine les différences nulles. On imagine tous les protocoles obtenus en affectant arbitrairement les D_+ signes "$+$" et les D_- signes "$-$" aux différences absolues $|d_i|$. Pour chaque protocole ainsi obtenu, on calcule $\sum d_i$. La zone d'acceptation de H_0 est formée des protocoles conduisant à des sommes $\sum d_i$ "proches de 0".

Deux tests basés sur ce principe : test des signes, test de Wilcoxon.

Test des signes

Un échantillon de sujets, placés dans deux conditions expérimentales différentes : groupes appareillés.

Variable dépendante : ordinale ou numérique.

– protocole du signe des différences individuelles ; modalités : -1, 0, 1
– on élimine les différences nulles

D_+ : nombre de différences positives
D_- : nombre de différences négatives
$N = D_+ + D_-$: nombre total d'observations après élimination des différences nulles.

Hypothèses du test :

H_0 : les différences sont dues au hasard : dans la population parente, la fréquence des différences positives est 50%.

H_1 : Cette fréquence n'est pas 50% (test bilatéral)
ou (tests unilatéraux)
Cette fréquence est inférieure à 50%
Cette fréquence est supérieure à 50%

• *Cas des petits échantillons*

Sous H_0, D_+ suit une *loi binomiale* de paramètres N et $p = 0.5$.

On raisonne en termes de "niveau de significativité".

Par exemple, dans le cas d'un test unilatéral tel que
H_1 : fréquence inférieure à 50%
on calcule la fréquence cumulée $P(X \leq D_+)$ de D_+ pour la loi binomiale $B(N, 0.5)$.
Pour un seuil α donné :
Si $P(X \leq D_+) < \alpha$ on retient H_1
Si $P(X \leq D_+) \geq \alpha$ on retient H_0

• *Cas des grands échantillons : approximation par une loi normale*

$$Z = \frac{2D_+ \pm 1 - N}{\sqrt{N}}$$

Z suit une loi normale centrée réduite.

Correction de continuité (± 1) : choisir le signe de façon à diminuer la valeur absolue de la statistique.

Test de Wilcoxon sur des groupes appareillés Test T, ou test des rangs signés

C'est le test des permutations appliqué au protocole des rangs signés.

Un échantillon de sujets, placés dans deux conditions expérimentales différentes : groupes appareillés.

Variable dépendante : numérique.

On construit :

– le protocole des effets individuels d_i
– le protocole des valeurs absolues de ces effets $|d_i|$
– le protocole des rangs appliqués aux valeurs absolues, en éliminant les valeurs nulles.

T_+ : somme des rangs des observations tq $d_i > 0$
T_- : somme des rangs des observations tq $d_i < 0$
N = nombre de différences non nulles
$T_m = \min(T_+, T_-)$;
$T_M = \max(T_+, T_-)$

Hypothèses

H_0 : Dans la population parente, les effets individuels positifs et les effets individuels négatifs s'interclassent de manière homogène

H_1 : Les deux classements sont différents (test bilatéral) ou les effets individuels positifs apparaissent plus fréquemment dans les rangs les moins élevés (resp. les plus élevés) (test unilatéral).

• *Cas des petits échantillons*
$N \leq 15$ *: utilisation de tables spécialisées*

On compare T_m aux valeurs critiques indiquées par la table.

• *Cas des grands échantillons*
$N > 15$ *: approximation par une loi normale*

$$Z = \frac{T_+ \pm 0.5 - \frac{N(N+1)}{4}}{E}$$

avec

$$E^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{24}$$

Z suit une loi normale centrée réduite.

Remarques.

Dans le test de Wilcoxon, la variable X est supposée continue. La probabilité d'observer des ex-aequos est donc *en théorie* nulle. Cependant, certains auteurs ont proposé des formules correctives pour tenir compte des ex-aequos.

Tests non paramétriques sur k groupes appareillés

Situation envisagée : un plan $\mathcal{S} * \mathcal{A}_k$ avec un facteur $\mathcal{A}$ à k niveaux définissant des groupes appareillés et une variable dépendante X ordinale ou numérique.

Effectif de l'échantillon de sujets : n.

Test Q de Cochran

Il s'applique au cas où la variable X est dichotomique. Par exemple : n sujets sont soumis aux k items d'un test. Résultats possibles : succès/échec. Les items ont-ils le même niveau de difficulté ?

H_0 : Dans la population, la probabilité de la modalité "1" est la même dans toutes les conditions.
H_1 : Dans la population, la probabilité de la modalité "1" n'est pas la même dans toutes les conditions.

Protocole observé :

Suj.	A_1	A_2	...	A_k	L_i	L_i^2
s_1	1	1	...	0	L_1	L_1^2
s_2	1	0	...	0	L_2	L_2^2
...						
s_n					L_n	L_n^2
G_j	G_1	G_2	...	G_k	G	

Notations :
L_i : somme sur la ligne i
G_j : somme sur la colonne j
G : somme des G_j avec $j = 1, 2, \ldots, k$
$\overline{G}$: moyenne des G_j

Statistique :

$$Q = \frac{(k-1)\left(k\sum G_j^2 - G^2\right)}{k\sum L_i - \sum L_i^2}$$

Calcul équivalent :

$$Q = \frac{k(k-1)\sum(G_j - \overline{G})^2}{k\sum L_i - \sum L_i^2}$$

Loi suivie par Q :

On élimine les lignes composées exclusivement de "0" ou exclusivment de "1". Soit N le nombre de lignes restantes.
Si $N \geq 4$ et $Nk > 24$, Q suit approximativement une loi du χ^2 à $k-1$ ddl.

Exemple :

Trois ascensions tentées par 5 alpinistes. Les trois ascensions présentent-elles le même niveau de difficulté ?

Suj.	A_1	A_2	A_3	L_i	L_i^2
s_1	1	1	0	2	4
s_2	1	0	1	2	4
s_3	0	0	1	1	1
s_4	0	1	1	2	4
s_5	1	0	1	2	4
G_j	3	2	4	9	

$$Q = \frac{2\left[3\,(9+4+16) - 9^2\right]}{3 \times 9 - 17} = 1.2$$

Analyse de variance à deux facteurs par les rangs de Friedman

Ce test s'applique au cas où la variable X est ordinale ou numérique.

H_0 : Dans les différentes conditions, les médianes sont égales : $M_1 = M_2 = \ldots = M_k$.
H_1 : Les k médianes ne sont pas toutes égales.

Statistique de test :

On calcule un protocole de rangs *par sujet*.

Notations :

n : nombre de sujets
k : nombre de conditions
R_j : somme des rangs de la colonne j (dans la condition A_j).

La statistique de Friedman est donnée par :

$$F_r = \left[\frac{12}{nk(k+1)} \sum R_j^2\right] - 3n(k+1)$$

F est tabulée pour les petites valeurs de n et k. Au delà, F suit approximativement une loi du χ^2 à $(k-1)$ ddl.

Exemple :

Trois individus statistiques (groupes de sujets) sont soumis à 4 conditions. Y a-t-il une différence significative entre les 4 conditions ?

Protocole observé :

	Conditions			
Ind.	I	II	III	IV
i_1	9	4	1	7
i_2	6	5	2	8
i_3	9	1	2	6

Protocole des rangs par individu statistique :

	Conditions			
Ind.	I	II	III	IV
i_1	4	2	1	3
i_2	3	2	1	4
i_3	4	1	2	3
R_j	11	5	4	10

$$F_r = \frac{12}{3 \times 4 \times (4+1)} \left(11^2 + 5^2 + 4^2 + 10^2\right) - 3 \times 3 \times (4+1)$$

D'où : $F_r = 7.4$

Lecture de la table : Au seuil de 5%, $F_{r,crit} = 7.4$. Il est difficile de conclure sur H_0 ou H_1.

Remarque. Correction possible pour les ex aequo. Mais l'effet est assez peu important.