Tester les conditions d'application d'un test paramétrique

Tester la normalité d'une distribution

Exercice 1

1) Lors d'une expérience, les scores observés sur un échantillon de 8 sujets sont les suivants :

Suj	s1	s2	s3	s4	s5	s6	s7	s8
x_i	5	7	8	11	12	13	13	15

On veut étudier la normalité de la distribution des scores dans la population parente. A l'aide d'un tableur, on construit le tableau suivant :

X_i	Z_i	$F(X <= Z_i)$	Theo	Ecart
5	-1,5877	0,125	0,0562	0,0688
7	-1,0104	0,25	0,1562	0,0938
8	-0,7217	0,375	0,2352	0,1398
11	0,1443	0,5	0,5574	0,0574
12	0,4330	0,625	0,6675	0,0425
13	0,7217	0,75	0,7648	0,0148
13	0,7217	0,875	0,7648	0,1102
15	1,2990	1	0,9030	0,0970
			Maximum	0,1398

Justifier la construction de ce tableau et utiliser les tests de Kolmogorov-Smirnov et de Lilliefors pour apporter une réponse au problème posé.

2) Sur un échantillon prélevé au hasard dans une autre population, les scores observés sont :

Suj	s1	s2	s3	s4	s5	s6	s7	s8
x_i	5	5.5	5.5	6	14	16	16	17

Le tableau de calcul, partiellement rempli, est le suivant :

X_i	Z_i	$F(X <= Z_i)$	Theo	Ecart
5	-1,0141	0,125	0,1553	0,0303
5,5	-0,9239	0,25	0,1778	0,0722
5,5	-0,9239	0,375	0,1778	0,1972
6	-0,8338	0,5	0,2022	0,2978
14	0,6085	0,625	0,7286	0,1036
16	0,9690	0,75		
16	0,9690	0,875		
17		1		
10,625	Moyenne		Maximum	
5,5469	Ec. type cor.			

Compléter ce tableau et utiliser de même les tests de Kolmogorov-Smirnov et de Lilliefors pour étudier la normalité de la variable dépendante étudiée.

Réponses : 1) Pour le test de K-S au seuil de 5%, la valeur critique est : $D_{crit} = 0.454$. *Comme* $D_{obs} < D_{crit}$, *on conclut sur* H_0 *: on ne peut pas rejeter l'hypothèse de normalité* *des scores dans la population parente. Pour le test de Lilliefors au seuil de 5%, on a* $L_{crit} = 0.285$*, et la conclusion reste identique.*

2) La valeur manquante dans la colonne Z_i *est* $\frac{17 - 10.625}{5.5469}$*, c'est-à-dire 1.1493. Les valeurs manquantes de la colonne "Theo" doivent être lues dans une table de la loi normale. Ce sont respectivement : 0.8337, 0.8337 et 0.8748. Les écarts peuvent alors être déterminés en calculant les différences entre les deux colonnes précédentes. Le maximum des écarts est 0.2978. En gardant un seuil de 5%, les valeurs critiques sont identiques à celles de la question 1. On serait donc conduit à accepter la normalité des scores en utilisant le test de K-S, et à la refuser en utilisant le test de Lilliefors.*

Exercice 2

Un chercheur a recueilli des données relatives à deux groupes indépendants de sujets. Avant de réaliser un test de Student, il souhaite tester la normalité de la variable dépendante dans les populations parentes. Plusieurs alternatives s'offrent à lui :

- Un premier collègue lui conseille de tester séparément les données relatives aux deux groupes ;
- Un deuxième collègue lui conseille d'effectuer le test en considérant la réunion des deux ensembles de données ;
- Un troisième collègue lui conseille de calculer dans chacun des deux groupes les écarts à la moyenne du groupe, puis d'effectuer un seul test sur la réunion de tous ces écarts.
- Un quatrième collègue lui conseille de prendre en compte les écarts réduits au lieu des écarts.

Quant à vous, quelle méthode conseilleriez-vous et pourquoi ?

Eléments de réponse. La plus mauvaise méthode est évidemment la 2è. Si la moyenne de la VD est différente dans les deux populations, la distribution sur la réunion des deux populations ne suit pas une loi normale. Dans la première méthode, on effectue deux tests indépendants, et notre conclusion dépend des résultats des deux tests. Le risque de commettre une erreur de type I ou de type II est donc plus élevé que lors de la réalisation d'un seul test. L'une des méthodes 3 et 4 pourrait donc sembler préférable, mais un manque de régularité de la VD dans l'une des populations pourrait se trouver masqué par une bonne régularité dans l'autre. La principale différence entre les méthodes 3 et 4 porte sur l'égalité des variances de la VD dans les populations parentes. Or, le test de Student suppose cette égalité. Le recours à la méthode 4 semble donc inutile. Les méthodes à privilégier seraient donc plutôt les méthodes 1 et 3, avec une préférence pour la méthode 3 si les échantillons sont de très faible effectif.

Exercice 3

Nurcombe et *al.* ont mené en 1984 une étude sur les enfants présentant un poids réduit à la naissance (PRN). Ces enfants posent des problèmes particuliers à leurs parents parce qu'ils sont, en apparence, apathiques et imprévisibles ; en outre, ils risquent de connaître des problèmes physiques et comportementaux. Les données dont on dispose portent sur deux groupes d'enfants ;

- Un groupe expérimental de 25 enfants PRN dont les mères bénéficiaient d'un apprentissage particulier : elles étaient sensibilisées aux signaux émis par ces enfants, afin de leur permettre de mieux répondre à leurs besoins ;
- Un groupe témoin de 31 enfants PRN dont les mères ne bénéficiaient d'aucun programme particulier ;

Il s'agit d'une part, de l'indice de développement mental (IDM) à 6 mois et à 24 mois pour le groupe témoin PRN, et d'autre part de l'IDM à 24 mois pour le groupe expérimental PRN.

On réalise des tests de normalité à l'aide de Statistica sur chacun de ces trois jeux de données. On obtient les résultats suivants :

– pour l'IDM à 6 mois dans le groupe PRN témoin

Variable	Tests de Normalité (Enfants-PRN.sta dans Enfants-PRN.s					
	N	D max	K-S p	Lillief. p	W	p
IDM-6	31	0,12975	p > .20	p > .20	0,96377	0,36577

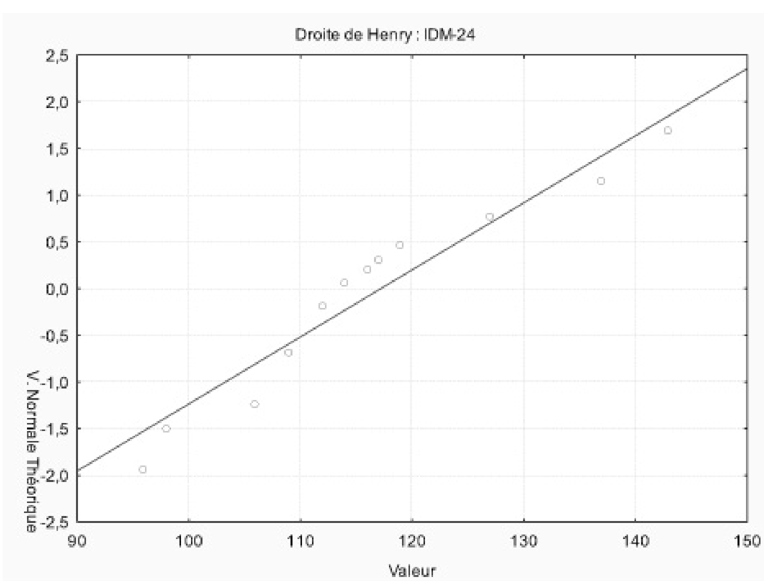
– pour l'IDM à 24 mois dans le groupe PRN témoin

Variable	Tests de Normalité (Enfants-PRN.sta dans Enfants-PRN.s					
	N	D max	K-S p	Lillief. p	W	p
IDM-24	31	0,10030	p > .20	p > .20	0,97346	0,61883

– pour l'IDM à 24 mois dans le groupe PRN expérimental

Variable	Tests de Normalité (Enfants-PRN.sta dans Enfants-PRN.s					
	N	D max	K-S p	Lillief. p	W	p
IDM-24	25	0,16356	p > .20	p < ,15	0,91464	0,03874

Commenter les résultats fournis par Statistica, ainsi que le graphique de la droite de Henry pour la troisième variable :



Réponse : Les trois tests indiquent une distribution normale des variables IDM-6 et IDM-24 dans la population dont est issu le groupe témoin. En revanche, le test de Shapiro-Wilk indique une absence de normalité de la variable IDM-24 dans la population dont est issu le groupe expérimental. Ce résultat n'est pas en accord avec ceux fournis par les deux autres tests, mais on sait que le test de Shapiro-Wilk est plus puissant que les deux autres.

Homogénéité des variances

Exercice 4 *Dossier "pedago"*
Lors d'une expérience pédagogique, on s'intéresse à l'effet comparé de deux pédagogies des mathématiques chez deux groupes de 10 sujets :

- pédagogie traditionnelle (p_1)
- pédagogie moderne (p_2)

On note la performance à une épreuve de combinatoire.

p_1 traditionnelle	
s1	5.0
s2	4.0
s3	1.5
s4	6.0
s5	3.0
s6	3.5
s7	3.0
s8	2.5
s9	1.5
s10	2.5

p_2 moderne	
s11	4.0
s12	5.5
s13	4.5
s14	6.5
s15	4.5
s16	5.5
s17	1.0
s18	2.0
s19	4.5
s20	4.5

1) Vérifier que les paramètres des deux échantillons sont donnés par :

	p_1	p_2
Moyenne	3.250	4.250
Ecart-type	1.365	1.553
Variance	1.863	2.413
Ecart-type corrigé	1.439	1.637
Variance corrigée	2.069	2.681

2) Avant d'appliquer un test de comparaison de moyennes, on veut s'assurer que l'on peut supposer les variances égales dans les populations parentes. Procéder à un test de comparaison de variances permettant de s'en assurer.
Réponses : 2) On obtient $F_{obs} = 1.30$. Or, pour $ddl_1 = 9$, $ddl_2 = 9$ et un seuil de 5%, on lit dans la table : $F_{crit} = 3.18$. L'hypothèse H_0 (égalité des variances) est donc retenue.

Exercice 5
Dans le cadre d'une analyse médicale, deux méthodes de dosage peuvent être utilisées. A partir d'un même prélèvement, on répète 25 fois la méthode A et 30 fois avec la méthode B. Les résultats sont rassemblés dans les tableaux ci-dessous.

Méthode A	
x_i (en g)	n_i
37	1
39	2
40	2
41	4
42	7
43	4
44	2
46	2
47	1
Total	25

Méthode B	
x_i (en g)	n_i
39	2
40	1
41	6
42	9
43	8
44	3
45	1
Total	30

1) Tester l'hypothèse : "les valeurs moyennes obtenues par les deux méthodes sont égales". (Autrement dit, les méthodes sont-elles exactes ?)
2) Comparer les variances des échantillons traités avec les deux méthodes à l'aide du test de Fisher. (Autrement dit, les deux méthodes ont-elles la même précision ?)
Réponses : 1) Les paramètres de statistiques descriptives sont donnés par :

	Méthode A	*Méthode B*
Moyenne	*42.08*	*42.10*
Variance	*4.95*	*1.89*
Variance corrigée	*5.16*	*1.96*

Le test de comparaison des deux moyennes (groupes indépendants) conduit à : $t_{obs} = -.04$*, évidemment non significatif aux seuils traditionnels. On ne peut donc pas refuser l'hypothèse* H_0 *d'égalité des moyennes.*
2) La statistique de test suit une loi de Fisher à $ddl_1 = 24$ *et* $ddl_2 = 29$ *degrés de liberté. On obtient :* $F_{obs} = 2.63$*. Au seuil de 1% unilatéral, on a* $F_{crit} = 2.49$*. On conclut donc à une différence des variances.*

Exercice 6
Au cours de certaines expériences, on est amené à mesurer le *temps de réaction* (TR) des sujets. C'est le temps qui s'écoule entre la présentation d'un stimulus (par exemple, une lampe qui s'allume devant le sujet) et la réaction que ce stimulus doit déclencher (par exemple, presser un bouton).
Première expérience. — Le tableau 1 fournit les TR d'une personne qui a réagi 20 fois à l'allumage d'une lampe rouge. On constate que ces 20 TR ne sont pas égaux. Ces variations d'un moment à l'autre sont imprévisibles à partir des informations dont on dispose dans l'expérience.
Deuxième expérience. — Le sujet voit maintenant s'allumer devant lui une lampe qui peut être rouge, verte ou jaune. il doit réagir si la lampe est rouge, mais ne doit pas réagir dans les deux autres cas. Le tableau 1 fournit 20 TR mesurés dans ces conditions. On observe de nouveau des variations imprévisibles d'un moment à l'autre.
Troisième expérience. — Les conditions sont les mêmes que dans la première expérience (une seule lampe) avec une seule différence : au lieu d'être rouge, la lampe donnant le signal de la réaction est verte. La troisième ligne du tableau donne les résultats. Les temps sont de nouveau différents entre eux.

Numéro d'ordre des 20 présentations	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1ère expérence	20	15	18	25	17	32	18	17	19	23
2è expérience	32	40	33	37	35	29	42	62	50	39
3è expérience	16	18	19	18	15	18	17	32	23	19

Numéro d'ordre des 20 présentations	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1ère expérience	19	21	15	22	17	17	21	19	17	23
2è expérience	45	47	52	37	38	39	40	41	42	39
3è expérience	23	20	18	25	15	15	17	23	17	19

1) La dispersion des TR est-elle la même dans chacune des trois conditions expérimentales ? Pour répondre à cette question, comparer deux à deux les variances des trois séries de données à l'aide du test de Fisher.
2) On teste globalement l'homogénéité des variances dans les trois conditions à l'aide des tests de Levene et de Brown-Forsythe. Interpréter les résultats fournis par Statistica :

	Test de Levene d'Homogénéité des Variances (TR.sta) Effets significatifs marqués à p < ,05000							
Variable	SC Effet	dl Effet	MC Effet	SC Erreur	dl Erreur	MC Erreur	F	p
TR	76,5613	2	38,2806	781,936	57	13,7181	2,79050	0,06979

	Test d'Homogénéité des Variances de Brown-Forsythe (TR.sta) Effets significatifs marqués à p < ,05000							
Variable	SC Effet	dl Effet	MC Effet	SC Erreur	dl Erreur	MC Erreur	F	p
TR	76,8000	2	38,4000	956,050	57	16,7728	2,28942	0,11057

Réponses : 1) Les variances des trois séries sont données par :

	Variance	*Variance corrigée*
1ère expérience	*14.89*	*15.67*
2è expérience	*53.85*	*56.68*
3è expérience	*16.23*	*17,08*

Pour $ddl_1 = 19$ et $ddl_2 = 19$ et un seuil de 5%, on a : $F_{crit} = 3.00$. Ici, $F_{2,1,obs} = 3.61$, $F_{2,3,obs} = 3.31$, $F_{3,1,obs} = 1.09$. Pour les expériences 1 et 3, l'hypothèse nulle (même variance) peut être retenue. En revanche, l'expérience 2 conduit à une variance différente de celles des deux autres.
2) Le niveau de significativité de chacun des deux tests est supérieur à 5%. On ne peut donc pas repousser l'hypothèse H_0, c'est-à-dire l'homogénéité des variances dans les trois groupes.

Exercice 7 On reprend l'exemple “boulimie” vu en cours. On rappelle ci-dessous les paramètres des données observées :

	Simple	Avec vom.
$\overline{x}_i$	4.61	−0.83
s^2_{ic}	219.04	79.21
n_i	49	32

1) Comparer les résultats observés dans les deux groupes à l'aide d'un test de Student, sans tenir compte d'éventuelles hypothèses sur les variances. La statistique de test à utiliser est alors :

$$t = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{E} \quad \text{avec} \quad E^2 = \frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)$$

2) Rappeler le résultat du test de comparaison des variances réalisé en cours.
3) Dans le cas de variances hétérogènes, il est conseillé d'utiliser comme statistique de test :

$$t' = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{E} \quad \text{avec} \quad E^2 = \frac{s_{1c}^2}{n_1} + \frac{s_{2c}^2}{n_2}$$

en prenant, comme nombre de degrés de liberté, l'entier le plus proche de la valeur :

$$dl' = \frac{A}{B} \quad \text{avec} \quad A = \left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2 \ , \ B = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}$$

Calculer la statistique t' et conclure.
Réponses : 1) On obtient $t_{obs} = 1.87$, non significatif au seuil de 5%.
3) On obtient $t'_{obs} = 2.064$, et $dl' = 78.58$. On garde donc 59 ddl, et la valeur observée est alors significative d'une différence entre les deux groupes.

Exercice 8

1) Pour $ddl_1 = 2, ddl_2 = 4$, la densité f de la loi de Fisher-Snedecor est donnée, pour $x \geq 0$ par :

$$f(x) = \frac{8}{(2+x)^3}$$

Construire point par point la courbe de la fonction f.
2) Pour $ddl_1 = 4, ddl_2 = 4$, la densité g de la loi de Fisher-Snedecor est donnée pour $x \geq 0$ par :

$$g(x) = \frac{6x}{(1+x)^4}$$

Construire point par point la courbe de la fonction g.

Analyse de la variance à un facteur (ANOVA) : comparaison de k moyennes sur des groupes indépendants

Exercice 9

Dans un établissement scolaire, on a réparti les élèves en trois classes de troisième ; les notes ci-dessous sont celles obtenues par les élèves en mathématiques au Brevet des Collèges. Peut-on dire que ces trois classes sont équivalentes ? Si oui, quelles seraient les caractéristiques de la population résultant de la fusion des trois groupes ?

G1	G2	G3
14	8	7
15	18	8
20	3	11
7	12	11
8	15	20
13	8	14
10	7	13
1	11	13
12	8	10
16	14	12
17	14	12
17	9	13
11	9	12
6	9	14
16	10	8

G1	G2	G3
8	14	13
10	15	12
11	14	8
11	13	8
7	10	11
10	12	15
11	10	8
12	12	14
11	12	16
8	11	13
	10	12
	10	15
	10	
	12	

Vérifier l'exactitude des tableaux ci-dessous et conclure.

	G1	G2	G3	Totaux	
n_j	25	29	27	81	
T_j	282	320	323	925	10563,27
Σx_{ij}^2	3600	3782	4091	11473	
T_j^2/n_j	3180,96	3531,03	3864,04	10576,03	
Inter	12,76				
Total	909,73				

Sources de variations	Sommes des carrés	DDL	Carrés moyens	F
Inter	12,76	2	6,38	0,55
Intra	896,97	78	11,50	
Total	909,73	80		

Réponses : Au seuil de 5%, $F_{crit}(2, 78) = 3.1$. La différence entre les groupes n'est donc pas significative. De plus, l'obtention d'un F_{obs} inférieur à 1 semblerait indiquer (sans pour autant le montrer) que les classes n'ont pas été constituées au hasard, mais qu'elles ont, au contraire, été rendues artificiellement homogènes : on a composé les trois classes de façon qu'elles soient de niveau équivalent.

Exercice 10

Lors d'une expérience pédagogique, on s'intéresse à l'effet comparé de deux pédagogies des mathématiques chez deux groupes de 10 sujets :

- pédagogie traditionnelle (p_1)
- pédagogie moderne (p_2)

On note la performance à une épreuve de combinatoire.

p_1 traditionnelle	
s1	5.0
s2	4.0
s3	1.5
s4	6.0
s5	3.0
s6	3.5
s7	3.0
s8	2.5
s9	1.5
s10	2.5

p_2 moderne	
s11	4.0
s12	5.5
s13	4.5
s14	6.5
s15	4.5
s16	5.5
s17	1.0
s18	2.0
s19	4.5
s20	4.5

1) Vérifier que les paramètres des deux échantillons sont donnés par :

	p_1	p_2
Moyenne	3.250	4.250
Ecart-type	1.365	1.553
Variance	1.863	2.413
Ecart-type corrigé	1.439	1.637
Variance corrigée	2.069	2.681

2) Ces données expérimentales permettent-elles d'affirmer que la pédagogie a un effet sur les résultats à l'épreuve de combinatoire ?

a) On décompose les données de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} 5.0 & 4.0 \\ 4.0 & 5.5 \\ 1.5 & 4.5 \\ 6.0 & 6.5 \\ 3.0 & 4.5 \\ 3.5 & 5.5 \\ 3.0 & 1.0 \\ 2.5 & 2.0 \\ 1.5 & 4.5 \\ 2.5 & 4.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.75 & 3.75 \\ 3.75 & 3.75 \\ 3.75 & 3.75 \\ 3.75 & 3.75 \\ 3.75 & 3.75 \\ 3.75 & 3.75 \\ 3.75 & 3.75 \\ 3.75 & 3.75 \\ 3.75 & 3.75 \\ 3.75 & 3.75 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.75 & -0.25 \\ 0.75 & 1.25 \\ -1.75 & 0.25 \\ 2.75 & 2.25 \\ -0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 1.25 \\ -0.25 & -3.25 \\ -0.75 & -2.25 \\ -1.75 & 0.25 \\ -0.75 & 0.25 \end{bmatrix}$$

Vérifier le calcul des sommes de carrés associées à cette décomposition :

$SC_{inter} = 20 \times 0.5^2 = 5$

$SC_{intra} = 1.75^2 + \ldots + 0.25^2 = 42.75$

Dresser le tableau d'analyse de variance et l'utiliser pour comparer les moyennes des deux groupes.

b) Comparer les résultats avec ceux obtenus à l'aide de la statistique T.
Réponses :
Le tableau d'analyse de variance est :

Sources de variation	*Sommes des carrés*	*DDL*	*Carrés moyens*	*F*
Inter	*5,0*	*1*	*5,0*	*2,11*
Intra	*42,75*	*18*	*2,375*	
Total	*47,75*	*19*		

Au seuil de 5%, $F_{crit}(1, 18) = 4.41$*. Hypothèse* H_1 *rejetée.*
Comparaison possible avec les résultats fournis par le T de Student : $t^2_{obs} = (-1.45)^2 = 2.10$*, c'est-à-dire la valeur de* F*.*

Enoncé 11 *Données Bransfor*
On reprend une expérience de Bransford et al. (1972), dans laquelle on demande à des sujets d'écouter le texte suivant :

> "Si les ballons éclatent, le son ne portera pas puisque tout sera bien trop loin du bon étage. Une fenêtre fermée empêchera également le son de porter, surtout depuis que les immeubles récents sont correctement isolés. Comme l'essentiel de l'opération dépend d'une arrivée correcte d'électricité, un fil cassé causerait bien des problèmes. Evidemment, le type peut hurler. Mais la voix humaine n'est pas assez puissante pour porter bien loin. Un problème supplémentaire serait qu'une corde casse sur l'instrument. Alors il serait impossible d'accompagner le message. C'est clair que la meilleure situation impliquerait la plus petite distance. Alors, il y aurait bien moins de problèmes potentiels. Avec un contact en face à face, un bien petit nombre de choses pourrait gêner."

Le but visé par Bransford *et al.* est de montrer l'importance du contexte dans la compréhension et la mémorisation d'un texte. Pour ce faire, ils utilisent quatre groupes expérimentaux :

1. Un groupe "sans contexte" entend simplement le texte.
2. Le groupe "avec contexte avant" regarde une figure suggérant un contexte approprié pendant qu'il entend le texte.
3. Le groupe "avec contexte après" entend le texte puis regarde la figure précédente.
4. Le groupe "avec contexte partiel" regarde une figure suggérant un contexte inapproprié pendant qu'il entend le texte.

A proprement parler cette étude comprend un groupe expérimental (le groupe 2 : contexte pendant) et trois groupes contrôles (les groupes 1, 3 et 4). Les groupes contrôles doivent permettre d'éliminer des explications concurrentes (en particulier, effet facilitateur sur la mémoire de l'imagerie, de l'aspect concret du matériel, etc.). L'expérimentateur s'attend, donc, à observer une performance pour le groupe 2 supérieure aux trois autres groupes.
Il choisit de mesurer le comportement des sujets par deux Variables Dépendantes : une note de compréhension donnée par les sujets (de 0 à 7, avec 0 indiquant l'incompréhension totale), et le nombre d'idées correctement rappelées (Bransford découpe le texte en 14 idées, essayez de les retrouver !). Quoique cette dernière Variable Dépendante soulève de

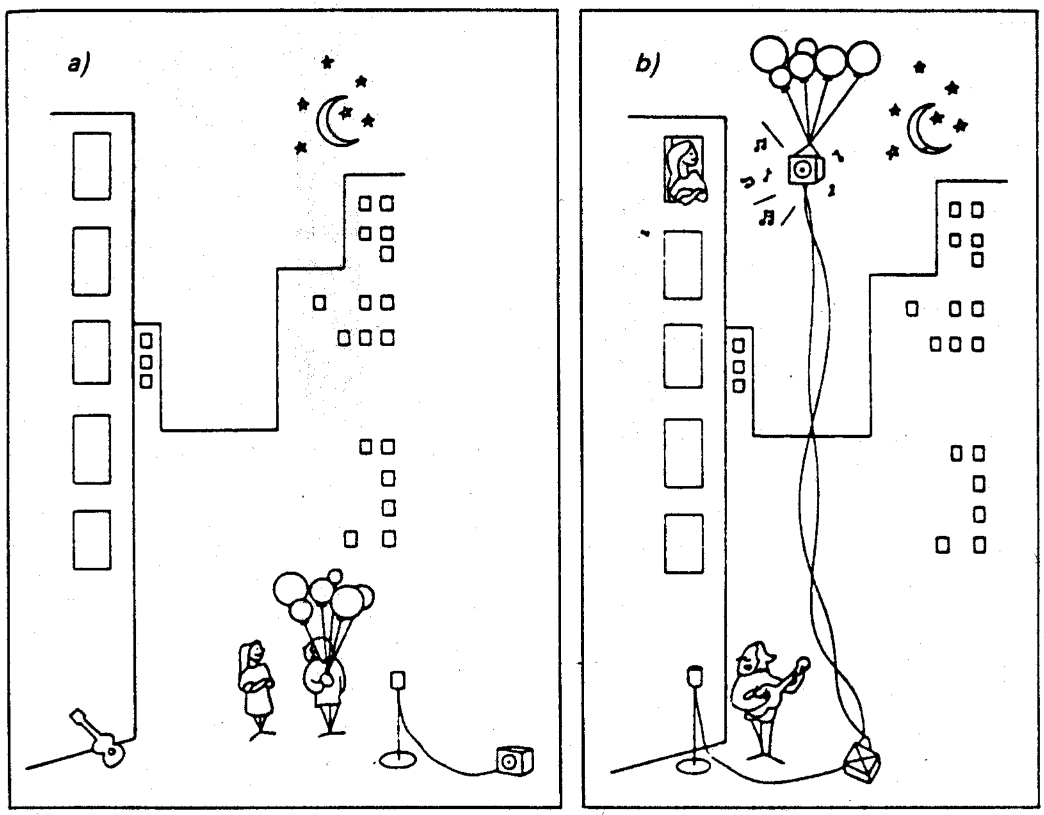


FIG. 1 – Contexte inapproprié (a) et approprié (b) pour l'expérience de Bransford

délicats problèmes de codage (e.g., à partir de quel moment une idée est présente...), elle reflète clairement l'intérêt des auteurs de cette expérimentation.
Dans cette expérience, on utilise vingt sujets répartis en quatre groupes. Les résultats, pour la Variable Dépendante "nombre d'idées rappelées" (maximum 14) se trouvent ci-dessous (mais avant, faites ce que doit faire un bon expérimentateur : prenez une feuille et détaillez les cinq premières étapes du test statistique avant de partir à la pêche aux résultats) :

Résultats de l'expérience				
	G.1	G.2	G.3	G.4
	3	5	2	5
	3	9	4	4
	2	8	5	3
	4	4	4	5
	3	9	1	4
$T_{.j}$	15	35	16	21
n_j	5	5	5	5
$\frac{T_{.j}}{n_j}$	3	7	3.2	4.2
Σx_{ij}^2	47	267	62	91

Justifiez les calculs et le tableau d'ANOVA suivants :
Table d'ANOVA :

Source	ddl	SC	CM	F_{cal}	$Pr(F > F_{cal})$
$\mathcal{A}$	3	50.95	16.98	7.22 **	.00288
$\mathcal{S}(\mathcal{A})$	16	37.60	2.35		
Total	19	88.55			

Si on utilise la procédure des valeurs critiques :
** $F_{critique} = 5.29$, au seuil $\alpha = .01$; $F_{cal} > F_{critique}$. On rejette H_0.
Les cinq étapes du test sont évidemment :

1. *Formulation des hypothèses statistiques H_0 et H_1. Ici :*
   H_0 : dans les 4 conditions, les moyennes dans la population parente sont égales
   H_1 : les 4 moyennes ne sont pas toutes égales.
2. *Choix du test : ici, une analyse de variance à un facteur. Statistique : F.*
3. *Distribution de la statistique de test : ici, le F de Fisher Snedecor avec $ddl_1 = 3$ (nombre de groupes – 1) et $ddl_2 = 16$ (nombre d'observations – nombre de groupes).*
4. *Seuil de signification choisi : ici, $\alpha = 1\%$.*
5. *Règle de décision : détermination des zones d'acceptation et de rejet de H_0. Ici, :*
   – *Si $F_{cal} \leq 5.29$, on accepte H_0 (égalité des moyennes)*
   – *Si $F_{cal} > 5.29$, on refuse H_0 et on accepte H_1.*

L'étude pourrait être poursuivie à l'aide de la méthode des contrastes orthogonaux (que nous ne détaillerons pas).
La première étape consiste opposer le groupe 2 aux trois autres groupes en testant l'hypothèse nulle : $3\mu_2 = \mu_1 + \mu_3 + \mu_4$. On calcule : $L_1 = 3\overline{x_2} - \overline{x_1} - \overline{x_3} - \overline{x_4} = 10.6$; $\sum a_j^2 = 3^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2 = 12$; $SC_{contraste1} = \dfrac{nL^2}{\sum a_j^2} = 46.81$
Dans la formule précédente, n est le nombre d'observations par groupe. Ici, $n = 5$. Le F de Fisher associé à ce contraste est obtenu en divisant $SC_{contraste1}$ par le carré moyen résiduel 2.35 ; il vaut 19.92. Les degrés de liberté sont 1 et 16. Le résultat est donc significatif d'un comportement du groupe 2 différent de celui des autres groupes.
La méthode peut être poursuivie en opposant le groupe 4 aux groupes 1 et 3 (coefficients appliqués aux quatre moyennes : 1, 0, 1, -2) puis en opposant les groupes 1 et 3 (coefficients appliqués : 1, 0, -1, 0).
Pourquoi s'agit-il de contrastes orthogonaux *?*
Réponse : Les "vecteurs" associés aux coefficients des trois contrastes, à savoir $V_1 = (-1, 3, -1, -1)$, $V_2 = (1, 0, 1, -2)$, $V_3 = (1, 0, -1, 0)$ sont deux à deux orthogonaux (par exemple, $V_1 \cdot V_2 = -1 \times 1 + 3 \times 0 + (-1) \times 1 + (-1) \times (-2) = 0$), ce qui garantit l'indépendance des résultats des trois tests.
Une autre grandeur intéressante est le coefficient (souvent noté η^2) d'estimation de l'intensité de l'effet de la variable indépendante. Dans le cas d'une analyse de variance à un facteur, il est défini par :

$$\eta^2 = \frac{SC_{inter}}{SC_{total}}$$

Il vaut donc ici : $\eta^2 = 0.58 = 58\%$.
Signification : 58% de la variance de la Variable Dépendante est expliquée par la Variable Indépendante (les différentes conditions expérimentales).
η^2 est aussi le carré d'un coefficient de corrélation. η peut en effet être obtenu comme coefficient de la corrélation entre l'ensemble des données observées d'une part, et la série

de données obtenue en remplaçant chaque observation par la moyenne de son groupe d'autre part. Sur notre exemple, soit U la série des données observées et V la série des données du modèle ainsi obtenu.

u_i	3	3	2	4	3	5	9	8	4	9	2	4	5	4	1	5	4	3	5	4
v_i	3	3	3	3	3	7	7	7	7	7	3.2	3.2	3.2	3.2	3.2	4.2	4.2	4.2	4.2	4.2

On obtient : $r(U,V) = 0.7585$ *et* $r^2(U,V) = 0.575$.

Enoncé 12 *Données Loftus*
Elisabeth Loftus (Loftus et Palmer 1974) —– dans une série d'expérimentations sur le thème du témoignage —– désire mettre en évidence l'influence de la tournure d'une question sur la réponse de témoins. Pour ce faire, elle montre à ses sujets, un film décrivant un accident de voiture. Elle pose, ensuite, une série de questions aux sujets. Parmi celles-ci se trouve une des cinq versions d'une question relative à la vitesse des véhicules. Voici ces versions :

1) HIT : About how fast were the cars going when they *hit* each other ? (A environ quelle vitesse allaient les voitures quand elles se sont "percutées").

2) SMASH : About how fast were the cars going when they *smashed* each other ? (To smash : écraser, heurter avec violence).

3) COLLIDE : About how fast were the cars going when they *collided* each other ? (To collide : entrer en collision, s'emboutir).

4) BUMP : About how fast were the cars going when they *bumped* each other ? (To bump : cogner, frapper).

5) CONTACT : About how fast were the cars going when they *contacted* each other ? (To contact : entrer en contact).

Les sujets répondaient en indiquant une vitesse exprimée en miles (nous sommes aux U.S.A). Voici les résultats obtenus (lors d'une réplique de l'expérience) :

HIT	SMASH	COLLIDE	BUMP	CONTACT
22	38	43	47	27
29	40	39	29	24
33	50	32	58	46
50	45	44	34	37
19	48	29	36	31
37	56	44	43	37
33	52	45	25	34
43	47	33	58	18
40	39	48	24	28
34	40	37	31	26

Après avoir identifié les variables dépendante(s) et indépendante(s), vous tirerez les conclusions de cette expérimentation.
Pour vous aider voici quelques statistiques pour chaque groupe :

	$T_{.j}$	$T_{.j}/n_j$	$T_{.j}^2/n_j$	$\Sigma_j x_{ij}^2$
Gr. 1	340	34.0	11560	12338
Gr. 2	455	45.5	20702.5	21043
Gr. 3	394	39.4	15523.6	15894
Gr. 4	385	38.5	14822.5	16241
Gr. 5	308	30.8	9486.4	10060
Total	1882		72095	75576

La Variable Dépendante est évidemment la vitesse exprimée en miles. La Variable Indépendante est le type de verbe utilisé pour poser la question sur la vitesse des voitures.
Manifestement, E. Loftus veut montrer que les "sous-entendus" des verbes sont pris en compte par les sujets dans leur décision sur la vitesse (e.g., les sujets utilisent la signification implicite des verbes comme une source d'information). Le point d'importance dans cette expérience est de remarquer que E. Loftus désire généraliser ses résultats à l'ensemble des verbes signifiant quelque chose comme "entrer en contact". Quoiqu'elle n'ait pas, à proprement parler, sélectionné ses verbes au hasard, elle les juge représentatifs de l'ensemble des verbes de mouvement. Le problème ici est de décider si le facteur expérimental est fixé ou aléatoire. Si l'on admet que les verbes choisis par Loftus représentent un échantillon représentatif, on décidera que le facteur est aléatoire (cf. La polémique initiée par Clark 1973). Si l'on juge que les modalités sont choisies en fait arbitrairement. on décidera que le facteur est fixé, et les conclusions de l'étude se restreignent aux modalités effectivement présentes dans l'expérimentation. Quelle que soit la décision prise, elle sera criticable.
Ici, le distinguo entre facteur fixé et aléatoire peut paraître sans importance car la décision (rejet ou non de l'hypothèse nulle) sera identique dans les deux cas. *Ce ne sera plus le cas dans des plans d'expérience plus complexes.* En fait, l'essentiel de l'argument de Clark (1973) est de montrer qu'une partie des recherches utilisant du matériel linguistique aboutit à des conclusions SCIENTIFIQUES erronées du fait de la confusion entre facteurs fixés et aléatoires (cf. aussi les réponses de Wike et Church 1976). Clark défend l'idée qu'une partie des conclusions de la psychologie du langage est invalide pour avoir cru que des facteurs aléatoires étaient fixes. A cette attaque répond Chastaing (1986) qui démontre méthodologiquement qu'une autre partie de la psychologie du langage est invalide d'avoir cru que des facteurs fixes étaient aléatoires !
Dans le cas présent, le choix entre les deux modèles n'a pas d'influence sur les résultats de l'analyse statistique : on aboutit à des conclusions statistiques identiques (mais pas à des interprétations psychologiques identiques !). L'analyse de variance permet de conclure en tout cas à un effet sur la vitesse estimée, du type le verbe utilisé pour poser la question.
On obtient le tableau d'analyse de variance suivant :

Source	ddl	SC	CM	F_{cal}	$Pr(F > F_{cal})$
Expérimentale	4	1256.52	314.13	4.06 **	.0069
Erreur	45	3481.00	77.36		
Total	49	4737.52			

Ainsi, le type de verbe employé pour interroger les sujets sur la vitesse des véhicules, influence l'estimation qu'ils donnent ($F_{cal}(4, 45) = 4.06,\ p < .05$). On remarque la vitesse élevée induite par *to smash.* Nous pourrions poursuivre cet exemple en essayant d'apprécier les différences entre ces différents verbes les uns par rapport aux autres).

Analyse de la variance à plusieurs facteurs

Enoncé 13 *Dossier "Geometrie"*
Dans une tâche de dénomination de figures géométriques, l'auteur étudie l'évolution du temps de réaction verbale en fonction de la discriminalité des figures.
Dans un premier temps, on présente aux sujets une série de figures. Pour la moitié d'entre eux, la série est constituée de 2 figures, pour l'autre moitié, de 4 figures. Dans chacun des cas, la série est constituée soit de figures facilement discriminables (triangle, carré,...) soit de figures plus complexes (octogone, décagone...).
Dans un deuxième temps, on demande à chaque sujet de nommer une figure tirée au hasard dans la série précédente et on mesure le temps de réaction verbale du sujet.
48 sujets répartis en 4 groupes de 12 ont participé à l'expérience.
Les moyennes des temps de réaction mesurés en millisecondes observés sur chacun des quatre groupes sont indiqués dans le tableau suivant :

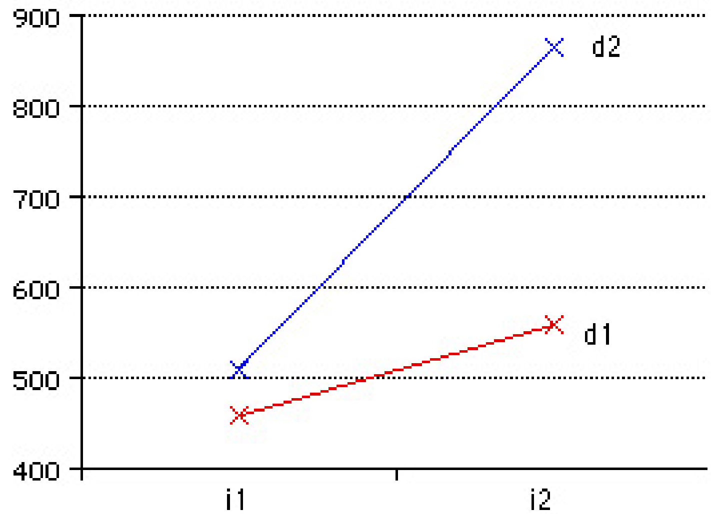
	Discriminalité	
Incertitude	Forte	Faible
2 figures	460	510
4 figures	559	864

1) Définir la variable dépendante et les variables indépendantes prises en compte. Quel est le plan d'expérience utilisé ?
2) Au vu du tableau précédent, indiquer s'il semble y avoir une interaction entre les deux facteurs étudiés. Construire un graphe d'interaction. Commenter ce graphe en rédigeant une phrase exprimant comment se traduit l'effet d'interaction.
3) Le tableau d'analyse de variance se présente ainsi :

Sources de var.	ddl	SC	CM	F
Discriminalité	1	3858.3	3858.3	45.06
Incertitude	1	6238.3	6238.3	72,85
Interaction	1	1885.4	1885.4	22,02
Résidu	44	3767.6	85.6	
Total	47	15666.7		

Préciser comment ont été obtenues :
- la valeur 85.6 dans la ligne "résidu" ;
- la valeur 45.06 dans la ligne "discriminalité".

Utiliser la table de la loi de Fisher-Snedecor pour indiquer si les effets principaux et l'effet d'interaction sont significatifs au seuil de 1%.
Réponses : 1) Le plan utilisé est ici $S_{12} < I_2 * D_2 >$.
2) Le temps de réaction augmente lorsque la discriminalité est plus faible. Mais cet effet est d'autant plus important que l'incertitude est élevé.



3) $85.6 = \frac{3767.6}{44}$; $45.06 = \frac{3858.3}{85.6}$. *Au seuil de 1%,* $F_{crit}(1,44) = 7.2$. *Les effets principaux et l'effet d'interaction sont donc significatifs.*

Enoncé 14

Des chercheurs se sont intéressés à l'effet de l'apprentissage de la musique sur les capacités visuo-spatiales des sujets[1].

Dans l'une des expériences réalisées, les chercheurs utilisent 24 sujets (12 musiciens et 12 non-musiciens). Dans une première condition, ils mesurent le temps de réaction des sujets soumis à un stimulus simple : un petit disque lumineux est affiché pendant 70 ms et les sujets doivent appuyer le plus rapidement possible sur un bouton lorsqu'ils aperçoivent le disque. Dans une deuxième condition, les sujets doivent effectuer un choix : le cercle lumineux est soit vert, soit rouge et les sujets doivent appuyer sur la flèche gauche ou la flèche droite d'un clavier selon la couleur du stimulus.

Les données (temps de réaction moyen sur 80 essais dans chaque condition) observées lors d'une reprise de cette expérience sont rassemblées dans le tableau **??**.

1) Le plan de cette expérience peut être écrit sous la forme $\mathcal{S}_{12} < \mathcal{X}_2 > *\mathcal{C}_2$. Définir les facteurs $\mathcal{S}$, $\mathcal{X}$ et $\mathcal{C}$. Précisez quels sont les niveaux de chacun de ces facteurs. Justifier l'écriture du plan d'expérience.

2) Les données ci-dessus sont traitées par une analyse de variance. Les sommes de carrés relatives aux différentes sources de variation sont indiquées ci-dessous :

Source	Somme des carrés
Expertise musicale	9690.1
Condition expérimentale	160083.0
Interaction Expertise × Condition	4524.1
Sujet(Expertise)	15889.9
Condition × Sujet(Expertise)	15273.9

a) Dresser le tableau d'analyse de variance correspondant. *N.B. L'ordre dans lequel sont indiquées les sources de variation dans le tableau précédent ne correspond pas nécessairement à l'ordre d'apparition dans le tableau d'ANOVA.*

[1] Effect of musical expertise on visuospatial abilities : Evidence from reaction times and mental imagery, Renaud Brochard, Anfré Dufour and Olivier Després, Brain and Cognition – Volume 54 (2004) pp. 103-109

Sujets	Expertise	Simple	Choix
s1	Mus.	160	303
s2	Mus.	208	230
s3	Mus.	181	272
s4	Mus.	133	236
s5	Mus.	190	283
s6	Mus.	215	282
s7	Mus.	183	261
s8	Mus.	205	291
s9	Mus.	126	322
s10	Mus.	190	268
s11	Mus.	157	284
s12	Mus.	164	233

Sujets	Expertise	Simple	Choix
s13	Non-Mus.	158	323
s14	Non-Mus.	202	345
s15	Non-Mus.	181	341
s16	Non-Mus.	164	340
s17	Non-Mus.	161	244
s18	Non-Mus.	204	333
s19	Non-Mus.	177	333
s20	Non-Mus.	194	287
s21	Non-Mus.	195	324
s22	Non-Mus.	201	311
s23	Non-Mus.	184	304
s24	Non-Mus.	199	354

TAB. 1 – Temps de réaction - Expérience 2

b) En utilisant un seuil de 5%, étudier quelles sont les sources de variation dont l'effet est significatif.

Indication de réponse :

Le tableau d'analyse de variance se présente ainsi :

Source	*ddl*	*SC*	*CM*	F_{cal}	*Sig*
X_2	*1*	*9690.1*	*9690.1*	*13.41*	**
$S(X_2)$	*22*	*15889.9*	*722.3*		
C_2	*1*	*160083*	*160083*	*230.6*	**
Interaction X_2C_2	*1*	*4524.1*	*4524.1*	*6.52*	*
Résidu $C_2S_{12}(X_2)$	*22*	*15273.9*	*694.3*		
Total	*47*	*205461*			

Tests non paramétriques sur des groupes indépendants

Enoncé 15
Dans une enquête, on a interrogé 84 hommes et 91 femmes. Les sujets devaient indiquer leur degré d'adhésion à une affirmation, sur une échelle en 5 points. Les résultats sont les suivants :

	Hommes	Femmes
Tout à fait d'accord	10	24
D'accord	15	15
Indifférent	19	21
Opposé	18	17
Tout à fait opposé	22	14

Etudier, à l'aide d'un test de Kolmogorov-Smirnov s'il existe une différence d'opinion entre les hommes et les femmes.
Réponse : Le tableau des fréquences cumulées est donné par :

	Hommes	*Femmes*	*Différence*
Tout à fait d'accord	*0.12*	*0.26*	*0.14*
D'accord	*0.30*	*0.43*	*0.13*
Indifférent	*0.53*	*0.66*	*0.13*
Opposé	*0.74*	*0.85*	*0.10*
Tout à fait opposé	*1.00*	*1.00*	*0.00*

D'où $D = 0.14$, $\chi^2 = 3.673$. *Le niveau de significativité vaut ici* $p = 0.15933$. *On n'a donc pas mis en évidence de différence entre les opinions des deux sexes.*

Enoncé 16
In a study of correlates of authoritarian personality structure, one hypothesis was that people high in authoritarianism would show a greater tendency to possess stereotypes about members of various national and ethnic groups than would those low in authoritarianism. This hypothesis was tested with a group of 98 randomly selected college women. Each subject was given 20 photographs and asked to "identify" (by matching) as many or as few photographs as they wished. Since, unknown to the subjects, all photographs were of Mexican nationals – either candidates for the Mexican legislature or winners in a Mexican beauty contest and since the matching list of 20 different national and ethnic groups did not include "Mexican", the number of photographs which any subject "identified" constitutes an index of that subject's tendency to stereotype.
Authoritarianism was measured by the F scale of authoritarianism, and the subjects were grouped as "high" and "low" scorers. High scorers were those who scored at or above the median on the F scale ; low scorers were those who scored below the median. The prediction was that these two groups would differ in the number of photographs they identified.

Number of photographs "identified"	Low scorers	High scorers
0-2	11	1
3-5	7	3
6-8	8	6
9-11	3	12
12-14	5	12
15-17	5	14
18-20	5	6

Source : Siegel, S. (1954). Certain determinants and correlates of authoritarianism. Genetic and Psychological Monographs, 49, 187-229.
Comparer les deux groupes à l'aide d'un test unilatéral de Kolmogorov-Smirnov au seuil de 1%.
Indications de réponses : La comparaison des deux fonctions de répartition est donnée dans le tableau suivant :

	0-2	*3-5*	*6-8*	*9-11*	*12-14*	*15-17*	*18-20*
$S_{44}(X)$	*11/44*	*18/44*	*26/44*	*29/44*	*34/44*	*39/44*	*44/44*
$S_{54}(X)$	*1/54*	*4/54*	*10/54*	*22/54*	*34/54*	*48/54*	*54/54*
$S_{44}(X) - S_{54}(X)$	*.232*	*.355*	*.406*	*.252*	*.143*	*.003*	*.0*

D'où $D = 0.406$, $\chi^2 = 4 \times 0.406^2 \frac{44\times54}{44+54} = 15.99$. H_1 *est retenue*

Enoncé 17

Dans une étude sur l'agressivité chez les jeunes enfants, un expérimentateur observe des binômes d'enfants dans une situation de jeu contrôlée. Il ne peut étudier que deux enfants par jour, et se demande si un biais pourrait apparaître du fait des discussions entre les enfants observés et ceux qui ne l'ont pas encore été. Si tel est le cas, la distribution des scores, ordonnée selon la date d'observation, ne devrait pas être aléatoire. Pour répondre à cette question, on convertit les scores en une variable dichotomique, selon leur position par rapport à la médiane des valeurs observées. On réalise ensuite un test des suites sur la suite des valeurs observées pour cette variable.
Les données sont les suivantes :

Sujet	Score	Pos/Med
1	31	+
2	23	−
3	36	+
4	43	+
5	51	+
6	44	+
7	12	−
8	26	+
9	43	+
10	75	+
11	2	−
12	3	−

Sujet	Score	Pos/Med
13	15	−
14	18	−
15	78	+
16	24	−
17	13	−
18	27	+
19	86	+
20	61	+
21	13	−
22	7	−
23	6	−
24	8	−

Vérifier que le nombre de "runs" est ici : $u = 10$, et que H_0 peut être retenue pour un test bilatéral au seuil de 5%.
Indications de réponse : Ici, $n_1 = n_2 = 12$*. Pour un test bilatéral au seuil de 5%, la table du test des suites donne comme valeurs critiques* $u_1 = 7$ *et* $u_2 = 19$*. La règle de décision est donc :* H_0 *est retenue si* $7 < u_{obs} < 19$*, ce qui est le cas ici.*

Enoncé 18

Les chercheurs en psychologie du sport ont utilisé le terme d'*élan psychologique*[2] pour décrire les variations de performance fondées sur des succès ou échecs récents qui modifient les croyances ou la psychologie des athlètes.
Pour étudier la réalité éventuelle de cet effet au niveau des sports d'équipe, un chercheur[3] a relevé les séries de défaites et de victoires des équipes de la National Basketball Association en 1996/97 et 1997/98.
Chaque équipe joue 82 matches par an. Pour l'une d'entre elles, on observe 45 victoires et 37 défaites, échelonnées chronologiquement comme suit :

V V D V V V D D D D D V V D D V V D V V
D D V V D D V V D D D V V D D D V D D
V V V V V D D V V V V D V V V D D D D V V V V
D V V D D V V D D V V V D V V D D D V V

a) Quel test statistique peut-on utiliser pour étudier si la succession des victoires et des défaites est aléatoire ?

b) Mettre en œuvre le test et conclure au seuil de 5%.
Indications de réponse : Il s'agit ici d'étudier si les successions de "D" et de "V" sont aléatoires ou non, ce qui peut être réalisé à l'aide du test de Wald-Wolfowitz. Le nombre de runs observés est ici $u = 35$*. Compte tenu des tailles d'échantillons (*$n_1 = 45$*,* $n_2 = 37$*), on utilise l'approximation par une loi normale. On obtient :* $\mu = 41.61$*,* $\sigma^2 = 19.8586$*,* $Z_{obs} = -1.37$*. Au seuil de 5% bilatéral,* $Z_{crit} = 1.96$*. Comme* $|Z_{obs}| \leq Z_{crit}$*, on conclut sur* H_0*. L'alternance de défaites et de victoires peut être due simplement à l'effet du hasard.*

Enoncé 19

Un chercheur se demande si l'ordre des hommes et des femmes dans une file d'attente à la caisse d'un théâtre est aléatoire ou non. On a relevé ci-dessous le sexe de 50 clients qui se sont présentés successivement à la caisse :
M F M F M M M F F M F M F M F M M M M F M F M F M M F F F M F M F M F
M M F M M F M M M M F M F M M
Répondre au problème posé à l'aide d'un test des suites.
Indications de réponse : On a ici : $n_1 = 30$ *et* $n_2 = 20$*. Le nombre de runs est* $u = 35$*. En utilisant l'approximation par une loi normale, on obtient* $z_{obs} = 2.83$*. On peut donc rejeter l'hypothèse* H_0 *au seuil de 5% bilatéral.*

Enoncé 20

This example is based on a study of gender differences in aggressiveness of four-year-old boys and girls (Siegel, 1956, page 138).

[2] *psychological momentum* dans le texte original

[3] Réf. Vergin R.C., Winning streaks in sports and the misperception of momentum, Journal of Sport Behavior, Vol. 23 No 2, 2000, pp. 181-197

Twelve boys and 12 girls were observed during two 15-minute play sessions ; each child's aggressiveness was scored (in terms of frequency and degree) during those sessions and a combined single aggressiveness index was derived for each child.
Ces données se trouvent dans le fichier Aggressn.sta (fichier exemple fourni avec Statistica).

Sexe	Score	Rang
GARCON	86	20
GARCON	69	18
GARCON	72	19
GARCON	65	16.5
GARCON	113	22
GARCON	65	16.5
GARCON	118	23
GARCON	45	12
GARCON	141	24
GARCON	104	21
GARCON	41	11
GARCON	50	13

Sexe	Score	Rang
FILLE	55	14
FILLE	40	10
FILLE	22	7
FILLE	58	15
FILLE	16	4
FILLE	7	1
FILLE	9	2
FILLE	16	5
FILLE	26	8
FILLE	36	9
FILLE	20	6
FILLE	15	3

1) Pourquoi ne semble-t-il pas pertinent d'utiliser un test paramétrique pour comparer ces deux groupes ?
2) Réaliser un test de Wald-Wolfowitz sur ces données. Comparer et vérifier les résultats trouvés avec ceux fournis par Statistica :

```
Test des Suites de Wald-Wolfowitz (Agressn.sta)
Tests significatifs marqués à p <,05000
            Z        niv. p     Z ajusté     niv. p   Nbe de Suites
AGGRESS -3,75681    0,000172    3,548100    0,000388      4
```

3) Réaliser un test de Kolmogorov-Smirnov. Comparer avec les résultats fournis par Statistica :

```
Test de Kolmogorov-Smirnov (Agressn.sta)
Tests significatifs marqués à p <,05000
         Max Nég Différnc   Max Pos Différnc    niv. p
AGGRESS      0,00              0,833333         p < .001
```

4) Réaliser enfin un test de Mann-Whitney.

```
Test U de Mann-Whitney (Agressn.sta)
Tests significatifs marqués à p <,05000
    SommeRgs   SommeRgs   U       Z        niv. p   Z ajusté   niv. p
     GARCON      FILLE
    216,0000    84,00000  6,00 3,810512  0,000139  3,812170   0,000138
```

Enoncé 21

On réalise un test de Mann-Whitney sur deux échantillons de tailles respectives $n_1 = 3$ et $n_2 = 4$. Le protocole des rangs observés sur l'ensemble des 7 observations est le suivant :
Groupe 1 : 1, 2, 4
Groupe 2 : 3, 5, 6, 7
1) Calculer W_1 et W_2. Quelle est la somme des rangs ? Comment peut-on la retrouver ?
2) *Passage des statistiques W_1 et W_2 aux statistiques U_1 et U_2.*
Calculer U_1, puis, pour chacun des sujets du groupe 1, compter le nombre de sujets du groupe 2 qui sont classés après lui. Additionner les 3 décomptes obtenus. Que constate-t-on ?
De même, calculer U_2, puis, pour chacun des sujets du groupe 2, compter le nombre de sujets du groupe 1 qui sont classés après lui. Additionner les 4 décomptes obtenus.
3) On veut étudier l'ensemble des protocoles obtenus en affectant au hasard 3 des 7 sujets dans le groupe 1.
a) Il existe 35 protocoles de ce type. Justifier.
b) Pour chacun de ces 35 protocoles, calculer la somme des rangs dans le premier groupe. Représenter la distribution obtenue à l'aide d'un diagramme en bâtons.
c) Quels sont les protocoles pour lesquels on pourrait conclure sur l'hypothèse alternative H_1 au seuil de 5% unilatéral ?
d) Le protocole observé est-il significatif d'une différence entre les deux groupes ?
4) Les échantillons considérés sont évidemment trop petits pour qu'il soit légitime d'utiliser une approximation par une loi normale. Vérifier cependant que les deux formules données dans le cours conduisent à la même valeur de la statistique Z.

Indications de réponses : La somme des rangs est 28. *Elle peut être retrouvée à l'aide de la formule* $1 + 2 + \ldots + N = \dfrac{N(N+1)}{2}$.
D'après la formule donnée en cours : $U_1 = 12 + 6 - 7 = 11$. *Evaluons, pour chaque sujet du groupe 1, le nombre de sujets du groupe 2 classés après lui :*

Rang du sujet	*Nb de suj. du gr. 2*
1	*4*
2	*4*
4	*3*
Total	*11*

Le nombre de protocoles obtenus en affectant au hasard 3 des 7 sujets dans le groupe 1 est le nombre de manières de sélectionner 3 rangs parmi les 7 possibles. Ce nombre est $C_7^3 = 35$. *Ces 35 protocoles et la somme* W_1 *associée à chacun d'eux sont donnés dans le tableau ci-dessous :*

Rangs des sujets							W_1
1	2	3					6
1	2		4				7
1	2			5			8
1	2				6		9
1	2					7	10
1		3	4				8
1		3		5			9
1		3			6		10
1		3				7	11
1			4	5			10
1			4		6		11
1			4			7	12
1				5	6		12
1				5		7	13
1					6	7	14
	2	3	4				9
	2	3		5			10
	2	3			6		11

Rangs des sujets						W_1
2	3				7	12
2		4	5			11
2		4		6		12
2		4			7	13
2			5	6		13
2			5		7	14
2				6	7	15
	3	4	5			12
	3	4		6		13
	3	4			7	14
	3		5	6		14
	3		5		7	15
	3			6	7	16
		4	5	6		15
		4	5		7	16
		4		6	7	17
			5	6	7	18

En considérant ces protocoles comme équiprobables, on voit que les fréquences des modalités de la variable W_1 sont données par :

Mod.	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*	*16*	*17*	*18*
Freq.	*1/35*	*1/35*	*2/35*	*3/35*	*4/35*	*4/35*	*5/35*	*4/35*	*4/35*	*3/35*	*2/35*	*1/35*	*1/35*

Le niveau de significativité du protocole observé (autrement dit la fréquence cumulée de la modalité 7) est 2/35, soit une valeur supérieure à 5%. Ce résultat est en accord avec les indications fournies par la table : $W_S = 6$.

Enoncé 22

Un psychologue scolaire veut étudier l'influence du niveau d'étude des mères d'élèves d'une classe de lycéens sur la fréquence de leurs visites auprès de la direction de l'école. Il obtient, pour l'année 1998-1999 :

Niveau d'études	Nombre de visites de la mère
Etudes primaires	4, 3, 0, 7, 1, 2, 0, 3, 5, 1
CEP	2, 4, 1, 6, 3, 0, 2, 5, 1, 2, 1
BEPC	2, 0, 4, 3, 8, 0, 5, 2, 1, 7, 6, 5, 1
Baccalauréat	9, 4, 2, 3
Etudes supérieures	2, 4, 5, 2, 2, 6

1) Montrer que les protocoles de rangs des trois groupes sont donnés par :

```
30.0 25.0 3.0 41.5 9.0 17.5 3.0 25.0 35.0 9.0
17.5 30.0 9.0 39.0 25.0 3.0 17.5 35.0 9.0 17.5 9.0
17.5 3.0 30.0 25.0 43.0 3.0 35.0 17.5 9.0 41.5 39.0 35.0 9.0
44.0 30.0 17.5 25.0
17.5 30.0 35.0 17.5 17.5 39.0
```

2) On demande à un logiciel de traitements statistiques de réaliser un test de Kruskal-Wallis sur ces données. Le résultat produit est le suivant :

```
Kruskal-Wallis rank sum test
data : list(x1, x2, x3, x4, x5) Kruskal-Wallis chi-squared = 2.8532, df = 4,
p-value = 0.5827
```

Refaites les calculs et confirmez les résultats donnés par le logiciel.
3) On réalise le test de Kruskal-Wallis à l'aide de Statistica, qui fournit les résultats suivants :

```
ANOVA de Kruskal-Wallis par Rangs ; Nb Visites (Données Psy-Sco)
Var. indépendante (classement) : Niveau
Test de Kruskal-Wallis : H ( 4, N= 44) =2,853226 p =,582
```

Ces résultats sont-ils en accord avec les précédents ?
4) Le test de la médiane généralisée, réalisé avec Statistica, donne :

```
Test Médiane, Méd. Globale = 2,50000 ; Nb Visites (Données Psy-Sco)
Var. indépendante (classement) : Niveau
Chi-Deux = 1,895105 dl = 4 p = ,7550
```

Vérifiez les résultats et expliquer pourquoi le niveau de significativité du résultat (.75) est nettement plus élevé que celui du test de Kruskal-Wallis (.58).

Enoncé 23

On réalise une enquête sur la satisfaction professionnelle éprouvée par les personnes actives, selon la profession. La satisfaction professionnelle est mesurée par 18 facteurs, sur une échelle de 1 à 5. La somme des évaluations des 18 facteurs est utilisée comme mesure de la satisfaction professionnelle. Une évaluation élevée correspond à un fort degré de satisfaction professionnelle.
1) Pour un échantillon de 10 juristes et un échantillon de 10 analystes informatiques, les données observées sont les suivantes :

Juristes	41	42	42	44	45	48	50	53	64	76
Analystes	38	44	55	60	62	64	66	71	73	74

a) Un statisticien conseille aux auteurs de l'enquête d'utiliser un test non paramétrique pour étudier ces données. Quelles sont les raisons qui l'amènent à faire ce choix ?
b) Etudier, à l'aide d'un test de Wilcoxon-Mann-Whitney, si la satisfaction professionnelle est plus élevée chez les analystes que chez les juristes (test unilatéral au seuil de 5%). Compte tenu des tailles d'échantillons, on pourra, au choix, utiliser la table du test de Wilcoxon-Mann-Whitney ou l'approximation par une loi normale.

Réponse
a) La variable étudiée est un score numérique calculé à partir de variables ordinales. Bien qu'elle puisse prendre un nombre élevé de valeurs (nombres entiers compris entre 18 et 90), il peut sembler préférable d'utiliser un test ne faisant aucune hypothèse sur la distribution de cette variable dans les populations parentes.
b) On construit tout d'abord le protocole des rangs pour l'ensemble des 20 observations :

Juristes	*2*	*3.5*	*3.5*	*5.5*	*7*	*8*	*9*	*10*	*14.5*	*20*
Analystes	*1*	*5.5*	*11*	*12*	*13*	*14.5*	*16*	*17*	*18*	*19*

La somme des rangs dans le groupe des juristes est 83, celle observée dans le groupe des analystes est 127.
On réalise un test unilatéral en prenant comme hypothèses statistiques :
H_0 *: Les scores des juristes et ceux des analystes s'interclassent de manière homogène.*
H_1 *: La probabilité qu'un score observé chez un juriste soit inférieur à un score observé chez un analyste est supérieure à 50%.*
Les deux échantillons sont ici de taille 10. On prend comme valeur observée de la statistique de test $W = 83$. *La valeur critique (au seuil de 5%) lue dans la table est :* $W_s = 82$.
La règle de décision est donc :
– *Si* $W \leq 82$, *on retient* H_1
– *Si* $W > 82$, *on retient* H_0.
Par conséquent, on retient H_0.

Variantes de cette solution :
On sait que la statistique U *de Mann-Whitney est donnée par :*

$$U_1 = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - W_1$$

$$U_2 = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2+1)}{2} - W_2$$

$$U = \min(U_1, U_2)$$

On a donc ici : $U_1 = 155 - 83 = 72$, $U_2 = 155 - 127 = 28$, *d'où* $U = 28$. *La table de la statistique* U *de Mann-Whitney donne, pour un test unilatéral au seuil de 5%,* $U_{crit} = 27$, *et la conclusion reste la même.*

On peut aussi utiliser l'approximation par une loi normale :
Par exemple : $E^2 = \dfrac{21 \times 20 \times 20}{12 \times 10 \times 10} = 7$; $Z = \dfrac{8.3 - 12.7}{\sqrt{7}} = -1.66$.
Or, pour la loi normale centrée réduite la valeur critique correspondant à un test unilatéral "à gauche" est $Z_c = -1.645$. *La conclusion est encore la même.*

2) En fait, le tableau précédent ne concernait qu'une partie des données recueillies. L'étude a porté sur 4 professions : juristes, thérapeutes, ébénistes et analystes informatiques. L'ensemble des scores observés est donné par :

Juristes	41	42	42	44	45	48	50	53	64	76
Analystes	38	44	55	60	62	64	66	71	73	74
Thérapeutes	52	55	59	60	62	78	80	86		
Ebéniste	54	59	64	65	69	79	79			

et le protocole des rangs par :

	Juristes	Analystes	Thérapeutes	Ebénistes
	2	1	10	12
	3.5	5.5	13.5	15.5
	3.5	13.5	15.5	22
	5.5	17.5	17.5	24
	7	19.5	19.5	26
	8	22	31	32.5
	9	25	34	32.5
	11	27	35	
	22	28		
	30	29		
$\overline{R}_i$	10.15	18.8	22	23.5

Etudier, à l'aide d'un test de Kruskal-Wallis, si les scores des 4 professions sont significativement différents.

Réponse
Les hypothèses H_0 et H_1 peuvent ici être exprimées par :
H_0 : La probabilité qu'un score provenant de l'une des 4 professions soit supérieur à un score provenant d'une autre profession est de 0.5.
H_1 : Ces probabilités ne sont pas uniformément de 0.5.
La statistique de test K est donnée par :

$$K = \left[\frac{12}{N(N+1)} \sum n_j \overline{R}_j^2 \right] - 3(N+1)$$

Elle suit une loi du χ^2 à 3 ddl. La valeur critique, pour un seuil $\alpha = 5\%$ est : $\chi^2_{crit} = 7.815$.
La règle de décision est donc :
– Si $K > 7.815$, on retient l'hypothèse alternative H_1
– Si $K \leq 7.815$, on retient l'hypothèse nulle H_0.
Ici, le calcul donne :

$$K = \frac{12}{35 \times 36}(10 \times 10.15^2 + 10 \times 18.8^2 + 8 \times 22^2 + 7 \times 23.5^2) - 3 \times 36 = 9.16$$

En conclusion, on retient donc l'hypothèse H_1 : les degrés de satisfaction attachés aux 4 professions sont significativement différents.

Tests non paramétriques sur des groupes appareillés

Enoncé 24

Dans le cadre d'une étude sur le tabagisme chez la femme enceinte, on interroge 100 sujets au 3è et au 8è mois de grossesse. On obtient les résultats suivants :

		Fumeur 8è mois	
		oui	non
Fumeur	oui	35	15
3è mois	non	5	45

Le comportement des sujets est-il le même dans les deux conditions ?

Réponse : Le χ^2 de Mac Nemar vaut ici $\chi^2 = 5$, ce qui est significatif d'une différence de comportement au seuil de 5%.

Enoncé 25

14 sujets sont observés dans deux conditions. On obtient 2 différences positives, 10 différences négatives, 2 différences nulles.

Quel est le niveau de significativité obtenu pour un test unilatéral ? pour un test bilatéral ?

Réponses. La statistique de test D_+ suit une loi binomiale de paramètres $N = 12$ et $p = 0.5$.

Calcul du niveau de significativité de $D_{+,obs}$ pour un test unilatéral :

$P(D_+ = 0) = C_{12}^0\ 0.5^{12} = 0.0002441$

$P(D_+ = 1) = C_{12}^1\ 0.5^{12} = 0.0029297$

$P(D_+ = 2) = C_{12}^2\ 0.5^{12} = 0.0161133$

D'où : $p = P(D_+ \leq 2) = 0.019 = 1.9\%$, pour un test unilatéral.

Pour un test bilatéral :

$p = P(D_+ \leq 2) + P(D_+ \geq 10) = 2P(D_+ \leq 2) = 3.8\%$.

Enoncé 26

40 sujets sont observés dans deux conditions. On obtient 10 différences positives, 30 différences négatives, 0 différence nulle.

Le test des signes met-il en évidence une différence de comportement entre les deux conditions ?

Réponse : On a ici : $D_+ = 10$ et $Z = \dfrac{20 + 1 - 40}{\sqrt{40}} = 3.00$

Au seuil de 1% unilatéral, on retient H_1 : les différences négatives sont significativement plus nombreuses que les différences positives.

Enoncé 27

On a testé huit sujets dans deux conditions A_1 et A_2. On obtient le protocole suivant :

Suj.	A_1	A_2
s1	100	105
s2	70	63
s3	40	50
s4	123	98
s5	92	60
s6	120	78
s7	172	119
s8	173	101

Etudier s'il existe une différence significative entre les deux conditions à l'aide d'un test des rangs signés de Wilcoxon.

Réponse. Contruction du protocole des rangs signés :

Suj.	A_1	A_2	d_i	$\|d_i\|$	r_{i+}	r_{i-}
s1	*100*	*105*	*5*	*5*	*1*	
s2	*70*	*63*	*-7*	*7*		*2*
s3	*40*	*50*	*10*	*10*	*3*	
s4	*123*	*98*	*-25*	*25*		*4*
s5	*92*	*60*	*-32*	*32*		*5*
s6	*120*	*78*	*-42*	*42*		*6*
s7	*172*	*119*	*-53*	*53*		*7*
s8	*173*	*101*	*-72*	*72*		*8*
T					*4*	*32*

On trouve $T_+ = 4$, $T_- = 32$ et donc $T_m = 4$.
Au seuil de 5% unilatéral, on lit dans la table : $T_{crit} = 5$.
Comme $T_m < T_{crit}$, on conclut à une différence significative entre les conditions A_1 et A_2 au seuil de 5% unilatéral.

Enoncé 28

Nous nous intéressons à l'influence du style d'interview sur les réponses des sujets à une enquête d'opinion. Nous pourrions entraîner un enquêteur à mener trois types différents d'interviews :
– Interview 1 : intérêt, ton amical, enthousiasme,
– Interview 2 : formalisme, réserve, courtoisie,
– Interview 3 : manque d'intérêt, ton abrupt, formalisme pesant.

L'enquêteur visite ensuite trois groupes de 18 foyers, et utilise le style 1 avec un groupe, le style 2 avec le 2è groupe et le style 3 avec le dernier groupe. Nous obtenons ainsi 18 triplets de foyers, comprenant chacun 3 foyers appariés selon des variables pertinentes. Pour chaque triplet, les trois éléments sont affectés au hasard aux trois conditions (styles d'interview). Nous mesurons ensuite l'effet du style d'interview en notant la réponse faite (oui/non) à un item particulier. Les données obtenues sont les suivantes :

Triplet	Style 1	Style 2	Style 3
1	0	0	0
2	1	1	0
3	0	1	0
4	0	0	0
5	1	0	0
6	1	1	0
7	1	1	0
8	0	1	0
9	1	0	0
10	0	0	0
11	1	1	1
12	1	1	1
13	1	1	0
14	1	1	0
15	1	1	0
16	1	1	1
17	1	1	0
18	1	1	0

Etudier à l'aide d'un test Q de Cochran si le style d'interview a une influence sur les réponses obtenues.
Réponse. On obtient ici $G_1 = 13$, $G_2 = 13$, $G_3 = 3$, $G = 29$, $\sum L_i^2 = 63$, *d'où* $Q = 16.7$. *Pour ddl* $= 2$ *et un seuil de 1%, la table donne :* $\chi^2_{crit} = 9.21$. *Les fréquences de réponses positives sont donc différentes selon les styles.*

Enoncé 29

Source : Exemple Synchron.sta fourni avec Statistica
Lorsque nous analysons un discours, nous faisons également attention aux signaux visuels ; plus précisément, nous comprenons beaucoup plus facilement un discours lorsque nous pouvons voir le visage de la personne qui parle. D'une certaine manière, "nous lisons tous sur les lèvres", du moins, dans une certaine mesure. Dodd a tenté de déterminer si des enfants âgés de 10 à 16 semaines étaient déjà conscients de la relation entre les mots et le mouvement correspondant des lèvres (de la personne qui les prononce). Dans cette optique, Dodd a placé les enfants dans une pièce où ils pouvaient voir la personne lisant un texte normal à travers une vitre. Le discours a été diffusé soit simultanément dans la pièce (conditions synchrones), soit avec un décalage de 400 millisecondes (conditions asynchrones). La variable dépendante était la durée pendant laquelle l'enfant regardé le visage à travers la vitre. Nous n'avons formulé aucune hypothèse quant à la condition particulière qui serait le plus susceptible d'attirer l'attention des jeunes enfants (il se peut que le discours asynchrone soit plus intéressant pour eux car il est nouveau, ou au contraire qu'ils détournent leur attention car ils perçoivent que le visage n'est pas à l'origine du discours).
Remarque : les noms d'observations sont constitués des initiales des individus.

	SYNCHRO	DECALAGE
DC	20.3	50.4
MK	17.0	87.0
VH	6.5	25.1
JM	25.0	28.5
SB	5.4	26.9
MM	29.2	36.6
RH	2.9	1.0
DJ	6.6	43.8
JD	15.8	44.2
ZC	8.3	10.4
CW	34.0	29.9
AF	8.0	27.7

Etudier, à l'aide d'un test des signes, puis d'un test des rangs signés de Wilcoxon, si les données recueillies confirment l'hypothèse du chercheur.

Réponses. On observe 2 différences positives sur 12 différences observées. Or, pour la loi binomiale de paramètres $N = 12$ *et* $p = 0.5$*, on a :* $P(X \leq 2) = 0.0193$ *et, par symétrie,* $P(X \leq 2) + P(X \geq 10) = 0.039$*. On conclut donc à une différence significative entre les deux conditions, au seuil de 5 %. Après avoir déterminé le protocole des rangs signés, on obtient* $T_{min} = 5$ *(somme des rangs des différences positives). Or, pour* $N = 12$*,* $\alpha = 2.5\%$ *et un test unilatéral, la table donne* $T_{m,crit} = 13$*. La valeur trouvée est donc significative d'une différence au seuil de* 5% *bilatéral.*

Enoncé 30

Un ergonome désire étudier la forme la plus économique pour un orifice dans lequel des ouvriers doivent faire passer une fiche. Il compare cinq formes d'orifices de moins en moins évasés. Grâce à un appareillage avec cellule photo-électrique, il mesure en millièmes de seconde le temps mis par un ouvrier pour mettre la fiche en position dans l'orifice. Chaque sujet effectue plusieurs essais et l'ergonome note pour chacun le temps médian. Pour 7 sujets, il a obtenu :

Sujet	Taille 1	Taille 2	Taille 3	Taille 4	Taille 5
1	244	417	178	195	452
2	235	307	225	346	613
3	308	290	257	427	438
4	343	305	290	215	534
5	254	263	252	340	469
6	251	291	417	263	445
7	333	414	414	276	441

Etudier, à l'aide d'un test de Friedman, si les médianes correspondant aux 5 formes d'orifices sont égales.

Réponse. Le protocole des rangs par sujet est donné par :

Sujet	*Taille 1*	*Taille 2*	*Taille 3*	*Taille 4*	*Taille 5*
1	*3*	*4*	*1*	*2*	*5*
2	*2*	*3*	*1*	*4*	*5*
3	*3*	*2*	*1*	*4*	*5*
4	*4*	*3*	*2*	*1*	*5*
5	*2*	*3*	*1*	*4*	*5*
6	*1*	*3*	*4*	*2*	*5*
7	*2*	*3.5*	*3.5*	*1*	*5*
R_j	*17*	*21.5*	*13.5*	*18*	*35*
R_j^2	*289*	*462.25*	*182.25*	*324*	*1225*

$$F_r = \frac{12 \times (289 + 462.25 + 182.25 + 324 + 1225)}{7 \times 5 \times 6} - 3 \times 7 \times 6 = 15.86$$

Pour un seuil de 5% et 4 ddl, on a : $\chi^2_{crit} = 9.49$*. On peut donc rejeter l'hypothèse nulle et conclure qu'il y a une influence de la forme de l'orifice sur le temps d'exécution de la tâche.*

Enoncé 31

L'hypnose : dans une expérimentation pratiquée en 1975, Lehman a enregistré le "potentiel cutané" en millivolts chez 8 sujets qui, par ailleurs, étaient interrogés sur la coloration psychique "crainte, joie, tristesse, calme" sous hypnose. Voici le tableau des observations :

	fear	joy	sadness	calmness
1	23.1	22.7	22.5	22.6
2	57.6	53.2	53.7	53.1
3	10.5	9.7	10.8	8.3
4	23.6	19.6	21.1	21.6
5	11.9	13.8	13.7	13.3
6	54.6	47.1	39.2	37
7	21.0	13.6	13.7	14.8
8	20.3	23.6	16.3	14.8

Etudier si l'effet de la coloration psychique sur le potentiel cutané est significatif à l'aide d'un test non paramétrique.

Réponse : le tableau des rangs par sujet s'écrit :

	1	*2*	*4*	*3*
	1	*3*	*2*	*4*
	2	*3*	*1*	*4*
	1	*4*	*3*	*2*
	4	*1*	*2*	*3*
	1	*2*	*3*	*4*
	1	*4*	*3*	*2*
	2	*1*	*3*	*4*
R_j	*13*	*20*	*21*	*26*
R_j^2	*169*	*400*	*441*	*676*

D'où $F_r = \dfrac{12}{8 \times 4 \times 5}(169 + 400 + 441 + 676) - 3 \times 8 \times 5 = 6.45$

La différence entre les conditions n'est pas significative.

Enoncé 32

Supposons que l'on demande à trois mélomanes d'une revue d'écouter 6 versions différentes d'une symphonie de Beethoven et de les ranger séparément suivant l'organisation des plans sonores (qui ressortissent de l'organisation spatiale des instruments, laquelle varie en général grandement selon le chef d'orchestre). Les trois séries indépendantes de rangs données par les trois mélomanes A, B, C sont exposées dans le tableau suivant :

	a	b	c	d	e	f
A	1	6	3	2	5	4
B	1	5	6	4	2	3
C	6	3	2	5	4	1

Les six versions sont-elles appréciées de la même façon ? Répondre à cette question à l'aide d'un test de Friedman.

Réponse : On a $F = 2.429$*. On n'a pas mis en évidence de différence entre les différentes versions.*

Corrélation et régression linéaires

Enoncé 33

On étudie la relation entre l'autoritarisme des étudiants et leur conformisme social. L'autoritarisme des sujets et leur conformisme social sont appréciés par le passage de tests.

étudiant	conformisme	autoritarisme
A	82	42
B	98	46
C	87	39
D	40	37
E	116	65
F	113	88
G	111	86
H	83	56
I	85	62
J	126	92
K	106	54
L	117	81

Vérifier que les protocoles des rangs sont donnés par :

étudiant	conformisme	autoritarisme	d_i^2
A	2	3	1
B	6	4	4
C	5	2	9
D	1	1	0
E	10	8	4
F	9	11	4
G	8	10	4
H	3	6	9
I	4	7	9
J	12	12	0
K	7	5	4
L	11	9	4
			52

Calculer la valeur du coefficient de corrélation de rangs de Spearman et tester la significativité de ce coefficient.
Réponse : on trouve $R_s = 0.82$, significatif au seuil de 5% bilatéral.
Calculer de même le coefficient τ de Kendall et tester sa significativité.
Réponse : $\tau = 0.67$. Significatif au seuil de 5% bilatéral

Exercice 34

Des chercheurs se sont intéressés à la relation entre la familiarité des noms de personnes et l'apparition de blocages dans une tâche de dénomination de visages. Plusieurs études antérieures montrent que les blocages portant sur des noms de personnes familières sont plus fréquents que les blocages portant sur des noms de personnes moins bien connues (effet de familiarité inversé). Cependant, l'effet inverse a été obtenu dans une étude de

laboratoire au cours de laquelle le nombre d'essais de récupération était contrôlé (effet de familiarité direct).
Dans leur étude, les chercheurs étudient notamment la corrélation entre le taux de blocage et le score de familiarité de la personne. Les individus statistiques sont ici les 32 stimulis (photographies de personnalités connues du show business).
a) Le coefficient de corrélation de Pearson obtenu est $r = -0.455$. Ce coefficient de corrélation est-il significatif d'une corrélation entre les deux variables étudiées ?
b) A titre de contrôle, les auteurs ont également calculé le coefficient de corrélation des rangs de Spearman. Ils ont obtenu : $R_s = -0.515$. Etudier, de même, la significativité d'un tel coefficient.
c) Comment peut-on interpréter ces coefficients de corrélation : semblent-ils indiquer un effet de familiarité direct ou un effet de familiarité inversé ?

Réponses
a) Soit ρ le coefficient de corrélation entre les deux variables dans la population parente. L'hypothèse nulle est $\rho = 0$, pendant que l'hypothèse alternative est $\rho \neq 0$. Pour $n - 2 = 30$ ddl, la table du coefficient de corrélation donne $r_{crit} = 0.4487$ pour un test bilatéral au seuil de 1%. Comme $|r| > r_{crit}$, on retient l'hypothèse alternative : il existe une corrélation non nulle entre les deux variables.
Variante :
On peut aussi utiliser ici la statistique $T = \sqrt{n-2}\,\dfrac{r}{\sqrt{1-r^2}}$. On obtient : $T_{obs} = -2.80$. Or, pour un test bilatéral au seuil de 1%, avec $ddl = 30$ la table indique : $T_{crit} = 2.75$. La conclusion est identique.
b) Au seuil de 1%, pour $n = 30$ et $n = 35$, la table du test de corrélation des rangs de Spearman indique respectivement $R_c = 0.467$ et $R_c = 0.433$. La valeur observée $R_s = -0.515$ indique donc une corrélation des rangs significative entre les deux variables.
Variante :
On peut aussi utiliser la statistique : $Z = \sqrt{N-1}\ R_s$. On a ici $Z_{obs} = -2.87$. Or, pour un test bilatéral au seuil de 1%, la table de la loi normale indique : $Z_{crit} = 2.575$. Comme $|Z_{obs}| > Z_{crit}$, on conclut encore sur l'hypothèse H_1 : il existe une corrélation des rangs significative entre les deux variables.

c) Les coefficients de corrélation trouvés sont négatifs. Autrement dit, plus le score de familiarité est élevé, plus le taux de blocages est faible. Cette étude semble donc montrer un effet de familiarité directe et non l'inverse.

Exercice 35
Dans un article publié en 2004, des chercheurs ont analysé le rôle du contrat psychologique, selon l'influence de ses contenus relationnels et transactionnels, dans la prévention du harcèlement moral au travail.
Pour tester leurs hypothèses, ils ont soumis un questionnaire semi-structuré à un échantillon de 265 travailleurs dans trois PME de l'Italie du Centre.

Le contrat psychologique a été appréhendé à l'aide d'une série de 12 items concernant le rapport à l'organisation, que les participants évaluaient sur une échelle de type Likert en 5 points (1= “beaucoup moins que ce qui était promis” ; 5 = “beaucoup plus que ce qui était promis”). Le questionnaire permet de saisir les deux dimensions du contrat psychologique, relationnelle (6 items) et transactionnelle (6 items).

La dimension “violation du contrat psychologique” a été mesurée à l’aide d’une série de quatre items, avec une échelle en 7 points. Un exemple d’item de la violation est : “je me sens trahi par mon organisation”.

La variable RCP_R (respect du contrat psychologique relationnel) est la moyenne des scores des 6 items du questionnaire se rapportant à cette dimension. On définit de même les variables RCP_T (respect du contrat psychologique transactionnel) et VCP (violation du contrat psychologique).

1) Le tableau ci-dessous est un extrait des données observées (variables RCP_R et VCP pour 10 sujets).

Sujet	RCP_R	VCP
S1	1.67	3.75
S2	1.83	3.50
S3	2.00	4.00
S4	2.33	4.50
S5	2.50	1.50
S6	2.67	1.75
S7	3.00	4.25
S8	3.17	0.50
S9	3.33	1.00
S10	3.50	0.75

a) Pour étudier la corrélation entre ces deux variables, on choisit de calculer un coefficient de corrélation des rangs de Spearman plutôt qu’un coefficient de corrélation de Bravais-Pearson. Pourquoi ?

b) Calculer le coefficient de corrélation des rangs de Spearman sur cet ensemble de données.

2) Pour l’ensemble des observations, les auteurs ont obtenu les coefficients de corrélation des rangs indiqués ci-dessous.

	RCP_R	RCP_T	VCP
RCP_R	1		
RCP_T	0.34	1	
VCP	-0.59	-0.14	1

Parmi ces coefficients de corrélation, quels sont ceux qui sont significatifs à 5% , à 1% ?

Exercice 36

Un questionnaire a été soumis à 15 sujets. Les réponses aux questions $Q1$ à $Q7$, données sur une échelle de Likert en 7 points sont indiquées ci-dessous :

Suj	$Q1$	$Q2$	$Q3$	$Q4$	$Q5$	$Q6$	$Q7$	S
s1	4	5	4	6	4	7	4	34
s2	4	3	4	5	5	4	4	29
s3	4	4	3	5	7	5	3	31
s4	4	3	6	5	4	2	5	29
s5	4	6	7	5	5	3	4	34
s6	5	6	6	8	4	5	6	40
s7	5	5	5	5	6	6	5	37
s8	4	3	2	5	5	5	3	27
s9	4	4	5	3	7	4	4	31
s10	4	3	5	3	1	3	4	23
s11	6	6	7	6	5	5	7	42
s12	2	4	3	1	4	4	5	23
s13	4	3	3	3	6	6	5	30
s14	5	6	5	4	3	3	5	31
s15	7	5	7	7	5	4	6	41

1) La matrice des corrélations entre les questions est donnée par :

	$Q1$	$Q2$	$Q3$	$Q4$	$Q5$	$Q6$	$Q7$
$Q1$	1.00	0.49	0.64	0.71	0.07	0.08	0.57
$Q2$	0.49	1.00	0.61	0.48	-0.01	0.11	0.52
$Q3$	0.64	0.61	1.00	0.49	-0.17	-0.39	0.64
$Q4$	0.71	0.48	0.49	1.00	0.08	0.23	0.32
$Q5$	0.07	-0.01	-0.17	0.08	1.00	0.40	-0.14
$Q6$	0.08	0.11	-0.39	0.23	0.40	1.00	0.00
$Q7$	0.57	0.52	0.64	0.32	-0.14	0.00	1.00

Quelles sont les questions entre lesquelles la corrélation est significative au seuil de 5% bilatéral ?

2) On souhaite évaluer la cohérence des réponses aux questions 1 à 7 ci-dessous.
Les moyennes et variances des variables $Q1$ à $Q7$ et de leur somme S sont données par :

	Moyenne	Variance
$Q1$	4.40000	1.25714
$Q2$	4.40000	1.54286
$Q3$	4.80000	2.60000
$Q4$	4.73333	3.06667
$Q5$	4.73333	2.35238
$Q6$	4.40000	1.82857
$Q7$	4.66667	1.23810
S	32.13333	34.98095

a) Calculer le coefficient α de Cronbach correspondant et commenter.

b) Pour deux des sept questions, la suppression de la question entraîne l'augmentation du coefficient. Sans faire de calculs, indiquer quelles sont vraisemblablement ces questions.

Indication : On obtient $\alpha = .7036$. Les questions dont la suppression entraînerait une hausse de α sont $Q5$ et $Q6$.

Exercice 37 *Données Budget*
Il s'agit d'un extrait d'une enquête (ONU 1967) sur les budgets-temps (temps passé dans différentes activités au cours de la journée).
Les colonnes comprennent 3 variables numériques, le temps passé en : Profession (PROF), Transport (TRAN) et loisirs (LOIS). Les temps sont notés en centièmes d'heures. Le code suivant est utilisé pour identifier les lignes :
H : hommes, F : femmes, A : actifs, N : non actifs, M : mariés, C : célibataires,
U : USA, W : pays de l'ouest, E : Est sauf Yougoslavie, Y : Yougoslavie.

Budget	PROF	TRAN	LOIS
HAU	610	140	315
FAU	475	90	305
FNU	10	0	430
HMU	615	140	305
FMU	179	29	373
HCU	585	115	385
FCU	482	94	336
HAW	653	100	330
FAW	511	70	262
FNW	20	7	368
HMW	656	97	321
FMW	168	22	311
HCW	643	105	388
FCW	429	34	392
HAY	650	140	365

Budget	PROF	TRAN	LOIS
FAY	560	105	235
FNY	10	10	380
HMY	650	145	358
FMY	260	52	295
HCY	615	125	475
FCY	433	89	408
HAE	650	142	334
FAE	578	106	228
FNE	24	8	398
HME	652	133	310
FME	436	79	231
HCE	627	148	463
FCE	434	86	380
Moy	451	86	346
Ety	223	47	63

1) Représenter le nuage de points correspondant aux variables PROF et TRAN, puis celui correspondant aux variables PROF et LOIS.
2) Calculer la covariance et le coefficient de corrélation pour le couple de variables (PROF, TRAN), puis pour le couple (PROF, LOIS). Dans chacun des deux cas, la corrélation est-elle significative ?
3) Déterminer l'équation de la droite de régression de TRAN selon les valeurs de PROF. Quelle est la part de la variance de TRAN qui est "expliquée" par PROF ?
Réponses : 2) Cov(PROF,TRAN)=9805.12 , r(PROF,TRAN)=0.93 ; Cov(PROF,LOIS)=-2651.87 , r(PROF,LOIS)=-0.19. Seule la corrélation entre PROF et TRAN est significative. L'équation de la droite de régression est : TRAN=0.1977 PROF - 3.15. La part de la variance de TRAN "expliquée par" PROF est de $\frac{Var(\widehat{TRAN})}{Var(TRAN)} = r^2 = 0.87$.

Exercice 38 *Données Tailles*
Le tableau ci-dessous donne la taille de 10 garçons (variable Z) ainsi que la taille de leurs parents (le père X et la mère Y).

	X	Y	Z
i1	160.0	161	165.0
i2	165.0	155	162.5
i3	170.0	155	165.0
i4	172.5	165	175.0
i5	175.0	170	180.0
i6	180.0	166	177.5
i7	185.0	167	180.0
i8	187.5	172	190.0
i9	190.0	175	195.0
i10	195.0	168	187.5

On cherche s'il existe une relation entre la taille du fils et celle de ses parents et, si oui, quelle est la part respective de la mère et du père. Pour cela, on procède à la régression de Z sur X et Y. On donne les résultats intermédiaires suivants :
$\sum X_i = 1780$; $\sum Y_i = 1654$; $\sum Z_i = 1777,5$
$\sum X_i^2 = 318012.5$, $\sum Y_i^2 = 273974$; $\sum Z_i^2 = 317068.75$
$\sum X_iY_i = 294932.5$; $\sum X_iZ_i = 317437.5$; $\sum Y_iZ_i = 294632.5$
$Var(X) = 117.25$; $Var(Y) = 40.24$; $Var(Z) = 111.81$
$Cov(X,Y) = 52.05$; $Cov(X,Z) = 104.25$; $Cov(Y,Z) = 63.40$.
1) Quels sont les coefficients de corrélation des variables prises deux à deux ?
2) On utilise un logiciel de traitement statistique pour déterminer l'équation du plan de régression de Z par rapport à X et Y. On obtient :
$Z = 0.4455X + 0.9993Y - 66.83$.
Calculer les valeurs estimées de Z pour chacun des 10 individus statistiques (variable $\hat{Z}$).
On donne par ailleurs : $\sum \hat{Z}_i^2 = 317060.06$ et $\sum Z_i\hat{Z}_i = 317054.34$.
3) Déterminer le coefficient de corrélation multiple.
4) Quelle est la proportion de variance prise en compte par la régression ?
5) Les coefficients de corrélation partielle sont donnés par : $R_{xz,y} = 0.91; R_{yz,x} = 0.95$
Quel est, de la taille du père et de celle de la mère, le meilleur prédicteur de la taille du fils ?
6) Prédire la taille d'un garçon, sachant que son père mesure 188cm et sa mère 171cm.
Réponses : N.B. Calculs exécutés à l'aide d'un logiciel de traitement statistique.
1) Les coefficients de corrélation des variables prises deux à deux sont donnés par : r(X,Y)=0.76 ; r(X,Z)=0.91 ; r(Y,Z)=0.95.
2) Les valeurs estimées de Z sont données par :

i1	*i2*	*i3*	*i4*	*i5*	*i6*	*i7*	*i8*	*i9*	*i10*
165.34	*161.57*	*163.8*	*174.90*	*181.01*	*179.24*	*182.47*	*188.58*	*192.69*	*187.92*

3) Coefficient de corrélation multiple : R=0.991.
4) D'où $R^2 = 0.98$. Le modèle explique 98% de la variance observée de la variable Z. Cette proportion est très élevée, mais il s'agit de données fictives....
5) Le coefficient de corrélation partielle le plus élevé est celui liant taille de la mère et taille du fils.
6) Taille du fils si X=188 et Y=171 : Z = 188.

Exercice 39 *Données Evalcour*
L'assocation des étudiants d'une grande université (américaine) a publié une évaluation de plus de cent cours enseignés durant le semestre précédent. Les étudiants de chaque

cours avaient rempli un questionnaire d'évaluation portant sur différents aspects du cours ; l'évaluation se faisait sur une échelle en cinq points (1=très mauvais, 5=excellent). Les données figurant dans les deux tableaux **??** et **??** pages **??** et **??** sont les données réelles. Elles représentent les scores moyens enregistrés sur 6 variables pour un échantillon de 50 cours. Ces variables étaient :

Qual-Glob	Pédagogie	Examen	Connaissan	Résultat	Inscriptio
3.4	3.8	3.8	4.5	3.5	21
2.9	2.8	3.2	3.8	3.2	50
2.6	2.2	1.9	3.9	2.8	800
3.8	3.5	3.5	4.1	3.3	221
3	3.2	2.8	3.5	3.2	7
2.5	2.7	3.8	4.2	3.2	108
3.9	4.1	3.8	4.5	3.6	54
4.3	4.2	4.1	4.7	4	99
3.8	3.7	3.6	4.1	3	51
3.4	3.7	3.6	4.1	3.1	47
2.8	3.3	3.5	3.9	3	73
2.9	3.3	3.3	3.9	3.3	25
4.1	4.1	3.6	4	3.2	37
2.7	3.1	3.8	4.1	3.4	83
3.9	2.9	3.8	4.5	3.7	70
4.1	4.5	4.2	4.5	3.8	16
4.2	4.3	4.1	4.5	3.8	14
3.1	3.7	4	4.5	3.7	12
4.1	4.2	4.3	4.7	4.2	20
3.6	4	4.2	4	3.8	18
4.3	3.7	4	4.5	3.3	260
4	4	4.1	4.6	3.2	100
2.1	2.9	2.7	3.7	3.1	118
3.8	4	4.4	4.1	3.9	35
2.7	3.3	4.4	3.6	4.3	32

Tab. 2 – Première partie des données

1. la qualité globale des exposés (Qual-Glob)
2. les aptitudes pédagogiques du professeur (Pédagogie)
3. la qualité des tests et examens (Examen)
4. la connaissance de la matière dont témoigne le professeur, telle qu'elle est perçue par les étudiants (Connaissan)
5. les résultats auxquels s'attendent les étudiants pour ce cours (Résultat, de très bon à insuffisant)
6. le nombre d'inscriptions à ce cours (Inscriptio)

Les résultats de statistiques descriptives concernant les variables précédentes sont donnés dans le tableau **??**.

Qual-Glob	Pédagogie	Examen	Connaissan	Résultat	Inscriptio
4.4	4.4	4.3	4.4	2.9	25
3.1	3.4	3.6	3.3	3.2	55
3.6	3.8	4.1	3.8	3.5	28
3.9	3.7	4.2	4.2	3.3	28
2.9	3.1	3.6	3.8	3.2	27
3.7	3.8	4.4	4	4.1	25
2.8	3.2	3.4	3.1	3.5	50
3.3	3.5	3.2	4.4	3.6	76
3.7	3.8	3.7	4.3	3.7	28
4.2	4.4	4.3	5	3.3	85
2.9	3.7	4.1	4.2	3.6	75
3.9	4	3.7	4.5	3.5	90
3.5	3.4	4	4.5	3.4	94
3.8	3.2	3.6	4.7	3	65
4	3.8	4	4.3	3.4	100
3.1	3.7	3.7	4	3.7	105
4.2	4.3	4.2	4.2	3.8	70
3	3.4	4.2	3.8	3.7	49
4.8	4	4.1	4.9	3.7	64
3	3.1	3.2	3.7	3.3	700
4.4	4.5	4.5	4.6	4	27
4.4	4.8	4.3	4.3	3.6	15
3.4	3.4	3.6	3.5	3.3	40
4	4.2	4	4.4	4.1	18
3.5	3.4	3.9	4.4	3.3	90

TAB. 3 – Seconde partie des données

Les coefficients de corrélation des variables prises deux à deux sont donnés dans le tableau **??**.
Les coefficients de l'équation de régression multiple de la première variable en fonction des cinq autres sont donnés par le tableau **??**.
Ecrire l'équation de régression correspondante, et la vérifier sur l'extrait donné dans le tableau **??**.
Enfin, le dernier tableau (tableau **??**) donne les coefficients de corrélation partiels entre la variable Qual-Glob et les prédicteurs.
La valeur du coefficient de corrélation multiple vérifie : $R^2 = 0.755$.

Exercice 40
Aux élections européennes de juin 1984, les votes pour la liste du Front National ont été très variables dans l'espace et leur comparaison avec d'autres variables fait apparaître un certain nombre de relations. Les variables choisies dans le tableau **??** sont les suivantes :
– LPEN : pourcentage de voix de la liste FN ;
– ETRA : pourcentage d'étrangers dans la population en 1982 ;
– DELI : Nombre pondéré de délinquance pour 100 habitants en 1980 ;

	Qual-Glob	Pedagogie	Examen	Connaissan	Resultat	Inscriptio
Effectif	50	50	50	50	50	50
Moyenne	3.55	3.664	3.808	4.176	3.486	88.0
Variance	0.376429	0.283167	0.2432	0.166351	0.123269	21042.2
Ecart-type	0.613538	0.532135	0.493153	0.407862	0.351097	145.059

Tab. 4 – Statistiques descriptives sur les données

	Qual-Glob	Pedagogie	Examen	Connaissan	Resultat	Inscriptio
Qual-Glob	1	0.8039	0.5956	0.6818	0.3008	-0.2396
Pedagogie	0.8039	1	0.7197	0.5263	0.4691	-0.4511
Examen	0.5956	0.7197	1	0.4515	0.6100	-0.5581
Connaissan	0.6818	0.5263	0.4515	1	0.2242	-0.1279
Resultat	0.3008	0.4691	0.6100	0.2242	1	-0.3371
Inscriptio	-0.2396	-0.4511	-0.5581	-0.1279	-0.3371	1

Tab. 5 – Coefficients de corrélation

Paramètre	Estimation
CONSTANTE	-1.19483
Inscriptio	0.000525491
Examen	0.131981
Resultat	-0.184308
Connaissan	0.488984
Pedagogie	0.763237

Tab. 6 – Coefficients de l'équation de de régression

Ligne	Observé	Ajusté	Résidu
1	3.4	3.77339	-0.373387
2	2.9	2.6592	0.240795
3	2.6	2.54643	0.0535724
4	3.8	3.45119	0.348812
5	3.0	2.74242	0.257584

Tab. 7 – Comparaison des valeurs observées et des valeurs ajustées

Régresseur	Coef
Pedagogie	0,6544
Examen	0,1213
Connaissan	0,4751
Resultat	-0,1656
Inscriptio	0,1990

Tab. 8 – Coefficients de corrélation partielle

– CRCH : Taux mensuel moyen d'évolution du chômage entre le 31.08.81 et le 30.04.83 ;
– TXCH : Pourcentage de chômeurs dans la population active au 30.09.83 ;
– URBA : Pourcentage de population urbaine en 1982.

Les individus statistiques sont ici les régions de France Métropolitaine (ILEF=Ile de France, CHAM=Champagne-Ardennes, etc.). L'échelle régionale n'est certainement pas la meilleure pour une telle étude et les conclusions valent pour les agrégats spatiaux et non des personnes.[4]

REG	LEPEN	ETRA	DELI	CRCH	TXCH	URBA
ILEF	14.5	13.3	6	0.23	7.1	93.6
CHAM	10.7	5.4	4	0.07	9.5	62.4
PICA	10.8	4.6	4	0.22	9.7	60.7
HNOR	8.9	3.3	4	0.01	11	69.1
CENT	9.3	5.1	3	0.51	7.8	62.9
BNOR	7.6	1.7	4	0.38	9.8	53.4
BOUR	10.1	5.4	3	0.72	8.6	57.9
NORD	9.1	4.8	4	0.21	11.8	86.4
LORR	12.4	8	4	0.51	9.2	72.4
ALSA	12.5	8.1	3	1.25	7.4	73.2
FCOM	12	7.4	4	0.19	8.2	58.8
PAYS	6.8	1.4	3	0.58	9.6	60.1
BRET	6.8	0.7	3	0.84	9.4	55.6
POIT	6.7	1.7	3	0.48	10	50.5
AQUI	8.3	4.6	4	0.85	9.5	64.6
MIDI	8.1	4.8	3	0.54	8.5	59.3
LIMO	4.8	2.7	3	0.57	6.9	50.9
RHON	12.9	9.1	4	0.57	7.5	76.9
AUVE	7.4	4.6	2	0.85	8.3	58.2
LANG	13.2	6.5	4	1.44	11.4	70.7
PROV	19	8.2	6	1.13	10.5	89.6

Tab. 9 – Voix du FN aux élections européennes de 1984

Le tableau **??** donne les valeurs des coefficients de corrélation des variables prises deux à deux. On voit que les votes pour l'extrême droite sont fortement corrélés à trois variables : taux d'urbanisation (URBA), taux de délinquance (DELI) et taux d'étrangers (ETRA). D'autre part, ces trois variables sont fortement corrélées entre elles, elles sont donc partiellement redondantes.

Une première régression multiple est réalisée en utilisant les 5 variables explicatives. Le coefficient de corrélation multiple vaut $R = 0.934$ et le coefficient de détermination, $R^2 = 0.872$

Les coefficients de corrélation partielle entre la variable LEPEN et chacune des autres variables sont alors ceux indiqués dans le tableau **??**.

On peut tester la significativité de ces coefficients de corrélation. Le nombre de degrés de liberté à prendre en compte est $21 - 6 = 15$. Au seuil de 5%, $r_{crit} = 0.4821$.

[4]D'après *Initiation aux méthodes statistiques en Géographie*, Groupe Chadule, Masson Ed., 1994

	LEPEN	ETRA	DELI	CRCH	TXCH	URBA
LEPEN	1	0.81	0.76	0.25	0.05	0.77
ETRA		1	0.62	0.08	-0.35	0.76
DELI			1	-0.14	0.19	0.75
CRCH				1	0.00	0.08
TXCH					1	0.13
URBA						1

Tab. 10 – Corrélations entre les variables

	ETRA	DELI	CRCH	TXCH	URBA
LPEN	0.6910802	0.52652694	0.5494687	0.45550366	-0.2161422

Tab. 11 – Corrélation partielle entre LEPEN et les 5 variables

On retire alors la variable qui a le plus faible coefficient de corrélation partielle, c'est-à-dire URBA et on réalise une régression multiple de la variable LPEN par rapport aux quatre variables explicatives restantes.
On trouve alors : $R = 0.930$, $R^2 = 0.865$ et les nouveaux coefficients de corrélation partielle indiqués dans le tableau **??**. Notons que R ne change pratiquement pas : la variable URBA n'apporte pas d'information supplémentaire par rapport aux quatre variables restantes.

	ETRA	DELI	CRCH	TXCH
LEPEN	0.73354021	0.49258622	0.5282723	0.4116398

Tab. 12 – Corrélation partielle entre LEPEN et 4 variables

Pour tester la significativité de ces coefficients, on prend ici $ddl = 16$ et donc $r_{crit} = 0.4683$.
Retirons de même la variable qui a le plus faible coefficient de corrélation partielle, c'est-à-dire TXCH.
On trouve alors : $R = 0.915$, $R^2 = 0.838$ et les coefficients de corrélation partielle du tableau **??**.

	ETRA	DELI	CRCH
LEPEN	0.6829056	0.6825633	0.5516189

Tab. 13 – Corrélation partielle entre LEPEN et 3 variables

A ce stade, $r_{crit} = 0.4683$, et tous les coefficients sont significatifs. On peut donc dire que les votes pour l'extrême-droite aux élections européennes de 1984, à l'échelle régionale, ont varié en fonction de trois circonstances : le taux d'étrangers, le taux de délinquance, et à un degré moindre, l'évolution du chômage.
La régression n'a pas été faite dans un but de prévision, et l'équation de régression n'a qu'un intérêt limité :

$$\text{LPEN} = 0.52\ \text{ETRA} + 1.69\ \text{DELI} + 2.37\ \text{CRCH} - 0.4$$