Analyse multidimensionnelle des données

F.-G. Carpentier

Exemples de données relevant de l'analyse multidimensionnelle

Consommations annuelles de 8 types de denrées alimentaires pour 8 catégories socio-professionnelles

	PAO	PAA	VIO	VIA	POT	LEC	RAI	PLP
AGRI	167	1	163	23	41	8	6	6
SAAG	162	2	141	12	40	12	4	15
PRIN	119	6	69	56	39	5	13	41
CSUP	87	11	63	111	27	3	18	39
CMOY	103	5	68	77	32	4	11	30
EMPL	111	4	72	66	34	6	10	28
OUVR	130	3	76	52	43	7	7	16
INAC	138	7	117	74	53	8	12	20

Source : Saporta, 1990

Variables :

PAO	Pain ordinaire
PAA	Autre pain
VIO	Vin ordinaire
VIA	Autre vin
POT	Pommes de terre
LEC	Légumes secs
RAI	Raisin de table
PLP	Plats préparés

Observations :

AGRI	Exploitants agricoles
SAAG	Salariés agricoles
PRIN	Professions indépendantes
CSUP	Cadres supérieurs
CMOY	Cadres moyens
EMPL	Employés
OUVR	Ouvriers
INAC	Inactifs

Exemples de données relevant de l'analyse multidimensionnelle

Tableau de contingence : répartition d'étudiants en 1975-1976

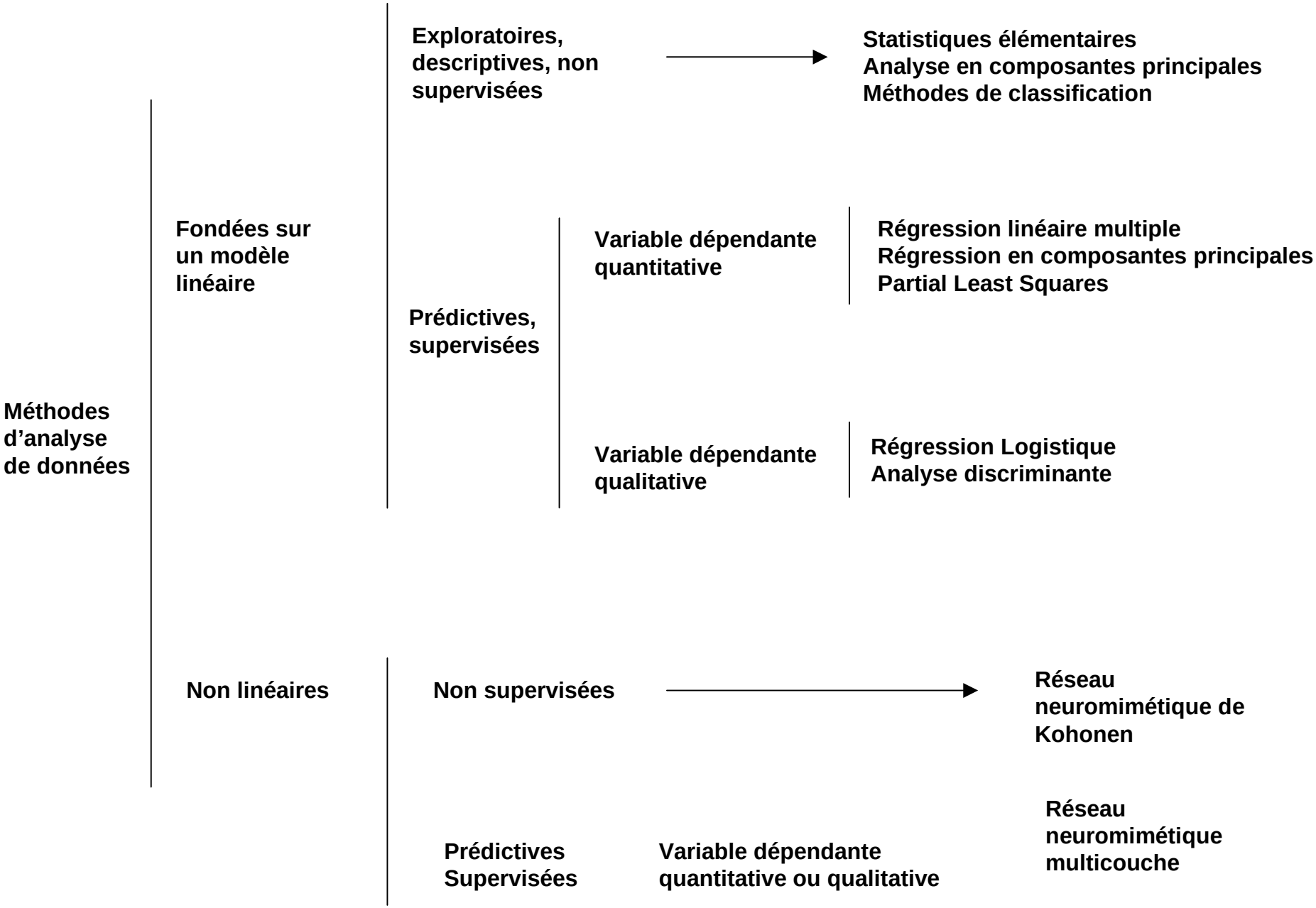
	Droit	Sciences	Médecine	IUT
Exp. agri.	80	99	65	58
Patron	168	137	208	62
Cadre sup.	470	400	876	79
Employé	145	133	135	54
Ouvrier	166	193	127	129

Cité par Saporta (1990)

Exemples de données relevant de l'analyse multidimensionnelle

Questions à réponses fermées : sexe (2 modalités), niveau de revenu (2 modalités), préférence (3 modalités)

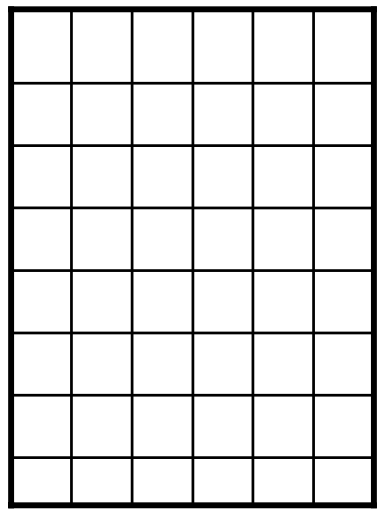
	1 Sexe	2 Revenu	3 Preference
s1	F	M	A
s2	F	M	A
s3	F	E	B
s4	F	E	C
s5	F	E	C
s6	H	E	C
s7	H	E	B
s8	H	M	B
s9	H	M	B
s10	H	M	A


Méthodes d'analyse de données
Fondées sur un modèle linéaire
Exploratoires, descriptives, non supervisées
Statistiques élémentaires
Analyse en composantes principales
Méthodes de classification
Prédictives, supervisées
Variable dépendante quantitative
Régression linéaire multiple
Régression en composantes principales
Partial Least Squares
Variable dépendante qualitative
Régression Logistique
Analyse discriminante
Non linéaires
Non supervisées
Réseau neuromimétique de Kohonen
Prédictives Supervisées
Variable dépendante quantitative ou qualitative
Réseau neuromimétique multicouche

Analyse en composantes principales

Données :

Variables p

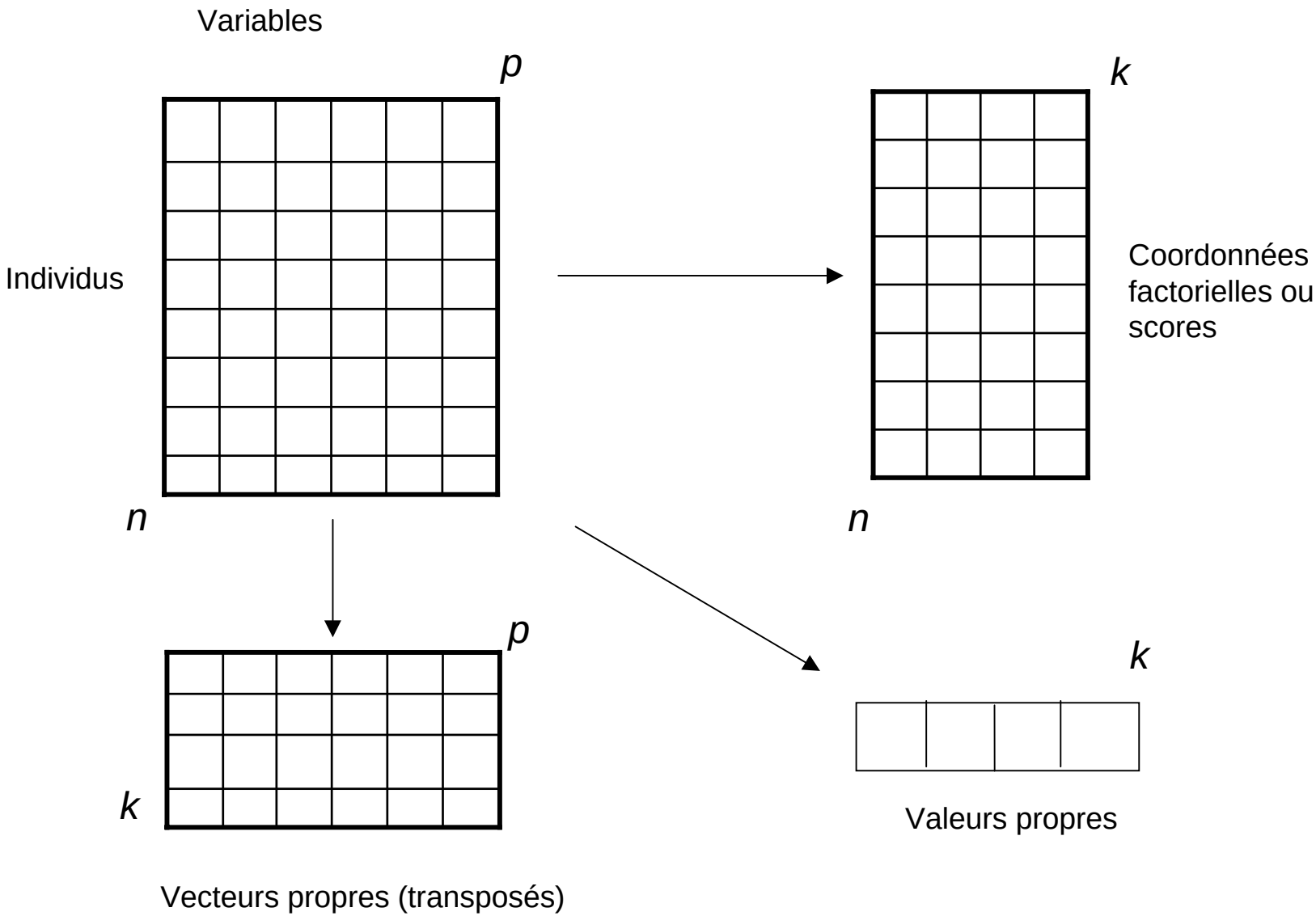


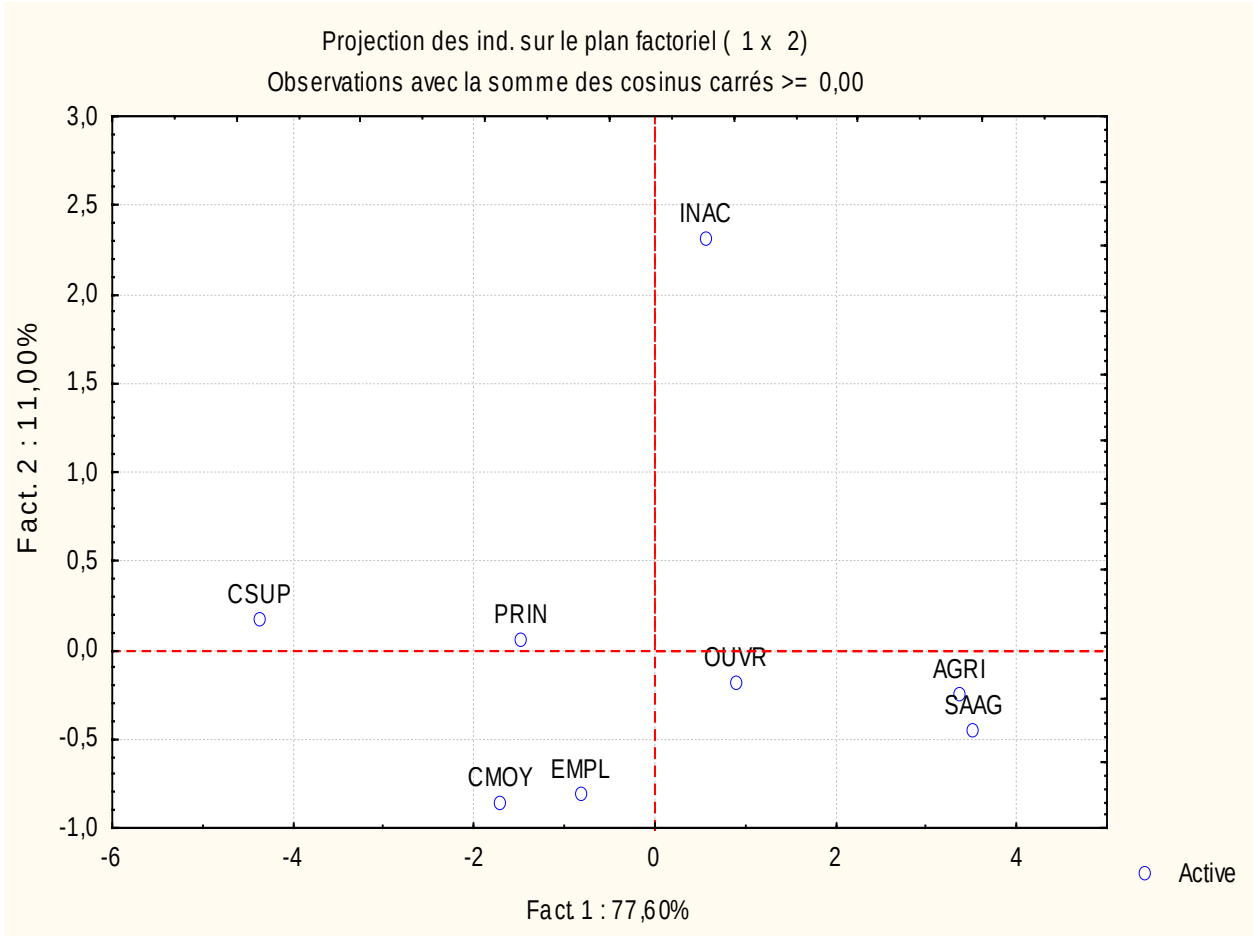
Individu ou observation

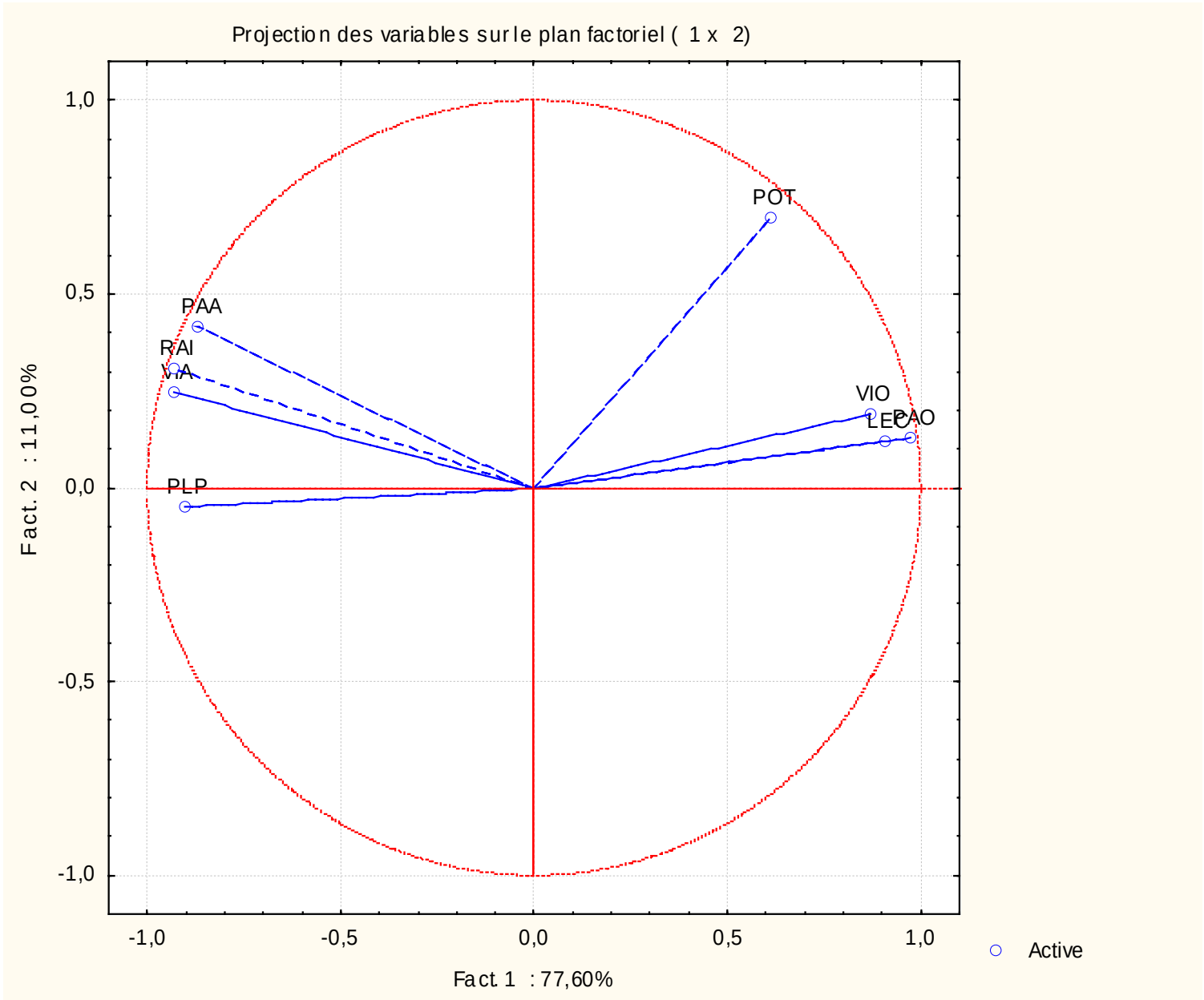
n

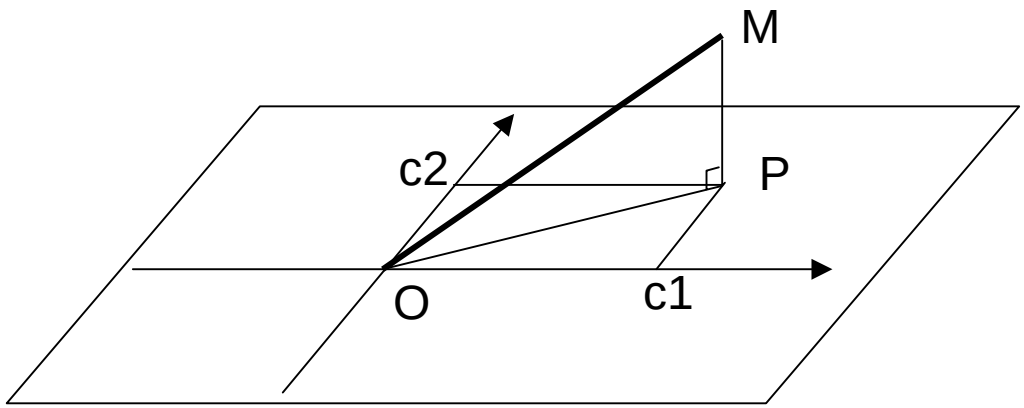
Elément de cette matrice : x_{ij}

Principaux résultats d'une ACP




Projection des ind. sur le plan factoriel (1 x 2)
Observations avec la somme des cosinus carrés >= 0,00
3,0
2,5
2,0
1,5
1,0
0,5
0,0
-0,5
-1,0
Fact. 2 : 11,00%
INAC
CSUP
PRIN
OUVR
AGRI
SAAG
CMOY
EMPL
-6
-4
-2
0
2
4
Fact. 1 : 77,60%
Active


Projection des variables sur le plan factoriel (1 x 2)
1,0
0,5
0,0
-0,5
-1,0
Fact. 2 : 11,00%
POT
PAA
RAI
VIA
VIO
LEC
PAO
PLP
-1,0
-0,5
0,0
0,5
1,0
Fact. 1 : 77,60%
Active



Cosinus carrés

$$Cos^2(\overrightarrow{OM}, CP_1) = \frac{Oc_1^2}{OM^2}$$

$$Cos^2(\overrightarrow{OM}, CP_2) = \frac{Oc_2^2}{OM^2}$$

$\overrightarrow{OM}$: vecteur de l'observation

$\overrightarrow{OP}$: vecteur de la projection sur le plan factoriel

$\overrightarrow{Oc_1}$: projection sur l'axe 1

$\overrightarrow{Oc_2}$: projection sur l'axe 2

Qualité

$$QUAL = Cos^2(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OP}) = \frac{OP^2}{OM^2}$$

	QLT	Coord. 1	Cos2	Ctr	Coord. 2	Cos2	Ctr
AGRI	0,889	1,35	0,884	22,89	-0,26	0,005	0,86
SAAG	0,913	1,41	0,898	24,97	-0,48	0,014	2,84
PRIN	0,576	-0,59	0,575	4,36	0,06	0,001	0,05
CSUP	0,943	-1,75	0,942	38,26	0,19	0,002	0,44
CMOY	0,940	-0,69	0,753	5,94	-0,91	0,187	10,43
EMPL	0,858	-0,32	0,428	1,31	-0,86	0,430	9,29
OUVR	0,376	0,36	0,361	1,63	-0,20	0,015	0,48
INAC	0,987	0,23	0,056	0,64	2,46	0,932	75,61
				100			100

Contributions des individus

Analyse factorielle des correspondances

Tableau de contingence : répartition d'étudiants en 1975-1976

	Droit	Sciences	Médecine	IUT
Exp. agri.	80	99	65	58
Patron	168	137	208	62
Cadre sup.	470	400	876	79
Employé	145	133	135	54
Ouvrier	166	193	127	129

Cité par Saporta (1990)

Test du khi-2 sur un tableau de contingence

Modalités lignes : variable X
Modalités colonnes : variable Y

Hypothèses du test :
H_0 : Les variables X et Y sont indépendantes
H_1 : Les variables X et Y sont dépendantes

	Droit	Sciences	Médecine	IUT
Exp. agri.	80	99	65	58
Patron	168	137	208	62
Cadre sup.	470	400	876	79
Employé	145	133	135	54
Ouvrier	166	193	127	129

Effectifs observés O

Construction de la statistique de test

	Droit	Sciences	Médecine	IUT	**Total**
Exp. agri.	80	99	65	58	**302**
Patron	168	137	208	62	**575**
Cadre sup.	470	400	876	79	**1825**
Employé	145	133	135	54	**467**
Ouvrier	166	193	127	129	**615**
Total	**1029**	**962**	**1411**	**382**	**3784**

Effectifs observés O_{ij}

	Droit	Sciences	Médecine	IUT
Exp. agri.	82,12	76,78	112,61	30,49
Patron	156,36	146,18	214,41	58,05
Cadre sup.	496,28	463,97	680,52	184,24
Employé	126,99	118,72	174,14	47,14
Ouvrier	167,24	156,35	229,32	62,09

Effectifs théoriques T_{ij}

$$T_{ij} = \frac{\text{Total ligne i} \times \text{Total colonne j}}{\text{Total Général}}$$

$$\text{Exemple}: 82{,}12 = \frac{302 \times 1029}{3784}$$

Contributions au khi-2

	Droit	Sciences	Médecine	IUT
Exp. agri.	0,05	6,43	20,13	24,83
Patron	0,87	0,58	0,19	0,27
Cadre sup.	1,39	8,82	56,15	60,11
Employé	2,55	1,72	8,80	1,00
Ouvrier	0,01	8,59	45,66	72,12

Contributions au khi-2 : $(O - T)^2/T$

$$\mathrm{Ctr}_{ij} = \frac{(O_{ij} - T_{ij})^2}{T_{ij}} \ ;$$

$$\text{Exemple} : 0{,}05 = \frac{(80 - 82{,}12)^2}{82{,}12}$$

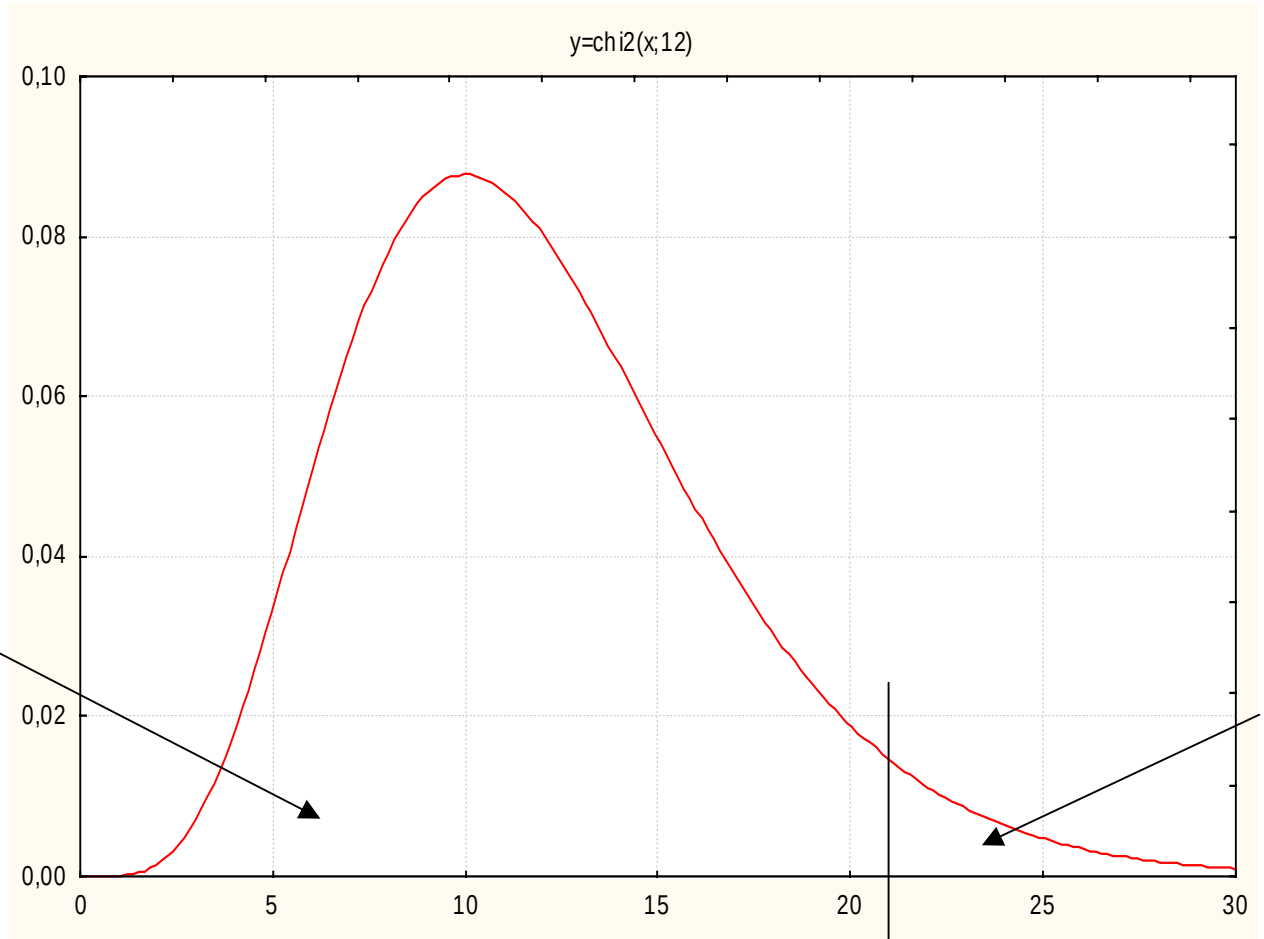
Calcul du khi-2

$$\chi^2_{Obs} = \sum_{i,j} \mathrm{Ctr}_{ij} = 0{,}05 + \ldots + 72{,}12 = 320{,}2$$

Nombre de degrés de liberté :

$$\mathrm{ddl} = (\text{Nb Modalités lignes} - 1)(\text{Nb Modalités colonnes} - 1) = 12$$

Loi du khi-2



95%

5%

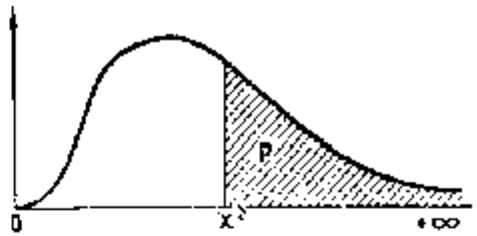
H_0 retenue

H_0 rejetée ; H_1 retenue

$\chi^2_{Crit} = 21{,}03$

DISTRIBUTION DE χ^2 (Loi de K. Pearson)

Valeur de χ^2 ayant la probabilité *P* dêtre dépassée.

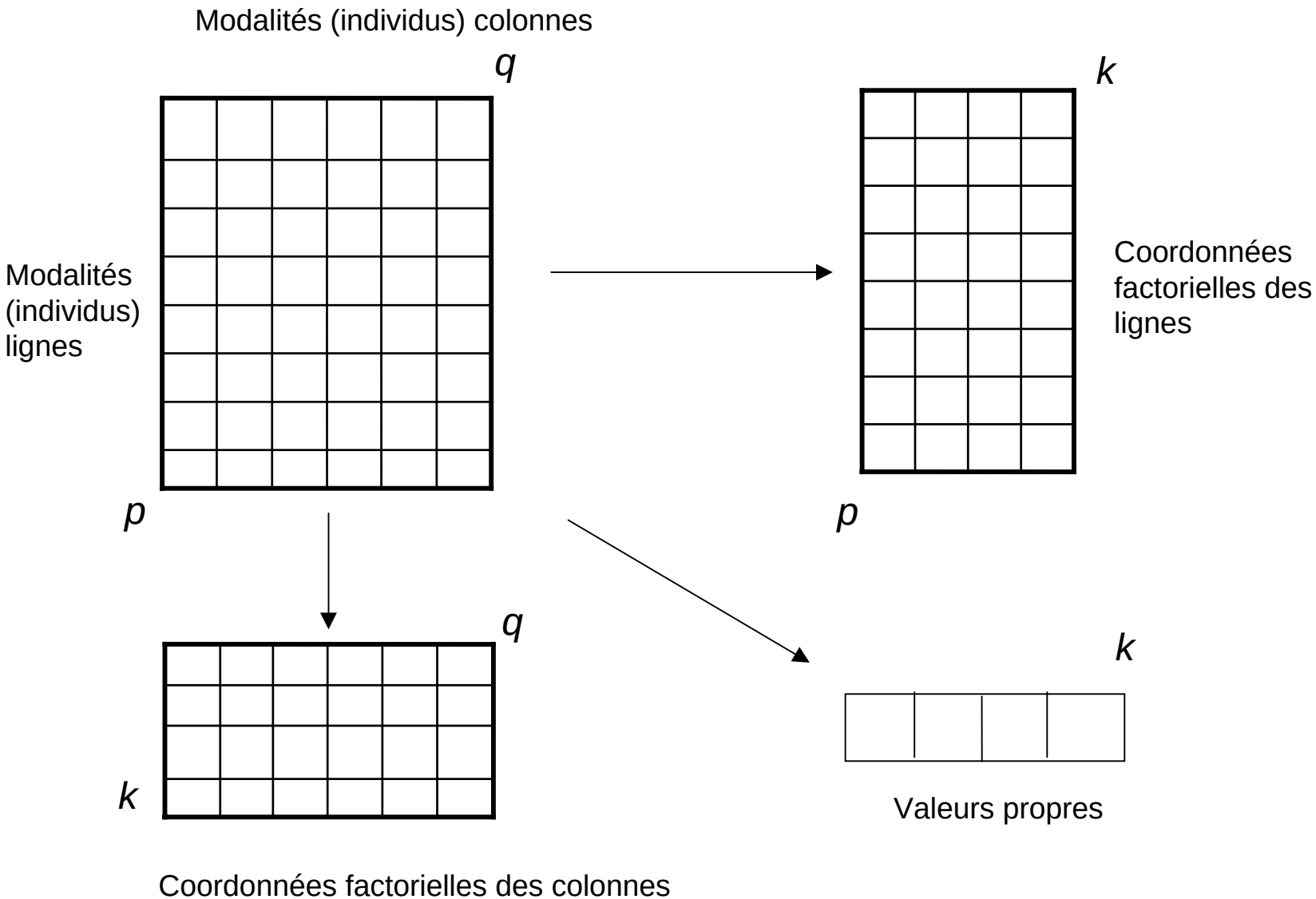


v	0,9	0,8	0,7	0,5	0,3	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01
1	0.0158	0.0642	0.148	0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635
2	0.211	0.446	0.713	1,386	2,408	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210
3	0.584	1.005	1.424	2,366	3,665	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345
4	1,064	1,649	2,195	3,357	4,878	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277
5	1,610	2,343	3,000	4,351	6,064	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086
6	2,204	3,070	3,828	5,348	7,231	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812
7	2,833	3,822	4,671	6,346	8,383	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475
8	3,490	4,594	5,527	7,344	9,524	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090
9	4,168	5,380	6,393	8,343	10,656	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666
10	4,865	6,179	7,267	9,342	11,781	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209
11	5,578	6,989	8,148	10,341	12,899	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725
12	6,304	7,807	9,034	11,340	14,011	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217
13	7,041	8,634	9,926	12,340	15,119	16,985	19,812	22,362	25,471	27,688
14	7,790	9,467	10,821	13,339	16,222	18,151	21,064	23,685	26,873	29,141
15	8,547	10,307	11,721	14,339	17,322	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578

$\chi^2_{Obs} > \chi^2_{Crit}$: on conclut donc sur H_1

Les deux variables étudiées dépendent l'une de l'autre

Principaux résultats d'une AFC



Effectifs et fréquences marginaux

	Droit	Sciences	Médecine	IUT	Effectifs marginaux lignes	Fréquence
Exp. agri.	80	99	65	58	302	0,0798
Patron	168	137	208	62	575	0,1520
Cadre sup.	470	400	876	79	1825	0,4823
Employé	145	133	135	54	467	0,1234
Ouvrier	166	193	127	129	615	0,1625
Effectifs marginaux colonnes	1029	962	1411	382	3784	
Fréquence	0,2719	0,2542	0,3729	0,1010		

Fréquences théoriques dans l'hypothèse d'indépendance

X	0,2719	0,2542	0,3729	0,1010					
0,0798						0,0217	0,0203	0,0298	0,0081
0,1520						0,0413	0,0386	0,0567	0,0153
0,4823					=	0,1312	0,1226	0,1798	0,0487
0,1234						0,0336	0,0314	0,0460	0,0125
0,1625						0,0442	0,0413	0,0606	0,0164

Fréquences théoriques dans l'hypothèse d'indépendance

$$\begin{bmatrix} 0{,}0798 \\ 0{,}1520 \\ 0{,}4823 \\ 0{,}1234 \\ 0{,}1625 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0{,}2719 & 0{,}2542 & 0{,}3729 & 0{,}1010 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}0217 & 0{,}0203 & 0{,}0298 & 0{,}081 \\ 0{,}0413 & 0{,}0386 & 0{,}0567 & 0{,}0153 \\ 0{,}1312 & 0{,}1226 & 0{,}1798 & 0{,}0487 \\ 0{,}0336 & 0{,}0314 & 0{,}0460 & 0{,}0125 \\ 0{,}0442 & 0{,}0413 & 0{,}0606 & 0{,}0164 \end{bmatrix}$$

Effectifs théoriques dans le cas d'indépendance

0,0217	0,0203	0,0298	0,0081		82,12	76,78	112,61	30,49
0,0413	0,0386	0,0567	0,0153		156,36	146,18	214,41	58,05
0,1312	0,1226	0,1798	0,0487		496,28	463,97	680,52	184,24
0,0336	0,0314	0,0460	0,0125		126,99	118,72	174,14	47,14
0,0442	0,0413	0,0606	0,0164	x 3784 =	167,24	156,35	229,32	62,09

	Droit	Sciences	Médecine	IUT
Exp. agri.	80	99	65	58
Patron	168	137	208	62
Cadre sup.	470	400	876	79
Employé	145	133	135	54
Ouvrier	166	193	127	129

Effectifs observés O

	Droit	Sciences	Médecine	IUT
Exp. agri.	82,12	76,78	112,61	30,49
Patron	156,36	146,18	214,41	58,05
Cadre sup.	496,28	463,97	680,52	184,24
Employé	126,99	118,72	174,14	47,14
Ouvrier	167,24	156,35	229,32	62,09

Effectifs théoriques T

	Droit	Sciences	Médecine	IUT
Exp. agri.	-2,12	22,22	-47,61	27,51
Patron	11,64	-9,18	-6,41	3,95
Cadre sup.	-26,28	-63,97	195,48	-105,24
Employé	18,01	14,28	-39,14	6,86
Ouvrier	-1,24	36,65	-102,32	66,91

Ecarts à l'indépendance : E = O - T

	Droit	Sciences	Médecine	IUT
Exp. agri.	82,12	76,78	112,61	30,49
Patron	156,36	146,18	214,41	58,05
Cadre sup.	496,28	463,97	680,52	184,24
Employé	126,99	118,72	174,14	47,14
Ouvrier	167,24	156,35	229,32	62,09

Effectifs théoriques T

	Droit	Sciences	Médecine	IUT
Exp. agri.	-2,12	22,22	-47,61	27,51
Patron	11,64	-9,18	-6,41	3,95
Cadre sup.	-26,28	-63,97	195,48	-105,24
Employé	18,01	14,28	-39,14	6,86
Ouvrier	-1,24	36,65	-102,32	66,91

Ecarts à l'indépendance : E = O - T

	Droit	Sciences	Médecine	IUT
Exp. agri.	0,05	6,43	20,13	24,83
Patron	0,87	0,58	0,19	0,27
Cadre sup.	1,39	8,82	56,15	60,11
Employé	2,55	1,72	8,80	1,00
Ouvrier	0,01	8,59	45,66	72,12

Contributions au khi-2 : $(O - T)^2/T$

D'où : Khi-2 = 320,2.

	Droit	Sciences	Médecine	IUT
Exp. agri.	82,12	76,78	112,61	30,49
Patron	156,36	146,18	214,41	58,05
Cadre sup.	496,28	463,97	680,52	184,24
Employé	126,99	118,72	174,14	47,14
Ouvrier	167,24	156,35	229,32	62,09

Effectifs théoriques T

	Droit	Sciences	Médecine	IUT
Exp. agri.	-2,12	22,22	-47,61	27,51
Patron	11,64	-9,18	-6,41	3,95
Cadre sup.	-26,28	-63,97	195,48	-105,24
Employé	18,01	14,28	-39,14	6,86
Ouvrier	-1,24	36,65	-102,32	66,91

Ecarts à l'indépendance : E = O - T

	Droit	Sciences	Médecine	IUT
Exp. agri.	-0,03	0,29	-0,42	0,90
Patron	0,07	-0,06	-0,03	0,07
Cadre sup.	-0,05	-0,14	0,29	-0,57
Employé	0,14	0,12	-0,22	0,15
Ouvrier	-0,01	0,23	-0,45	1,08

Taux de liaison : (O - T)/T : valeurs dans l'intervalle [-1, +∞ [

-0,42 : l'effectif observé est inférieur de 42% à l'effectif théorique

1,08 : l'effectif observé est supérieur de 108% à l'effectif théorique

Analyse des correspondances

Les questions auxquelles on cherche à répondre :

- Quelles sont les modalités lignes qui sont « proches » du profil ligne moyen ? Quelles sont celles qui s'en écartent le plus ?

- Quelles sont les modalités colonnes qui sont « proches » du profil colonne moyen ? Quelles sont celles qui s'en écartent le plus ?

- Quelles sont les modalités lignes et les modalités colonnes qui « s'attirent » ? Quelles sont celles qui « se repoussent » ?

Analyse des correspondances

Notations :

Soit un tableau de contingence comportant p lignes et q colonnes.

- L'élément du tableau situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j est noté n_{ij}.

- La somme des éléments d'une ligne est notée $n_{i\bullet}$

- La somme des éléments d'une colonne est notée $n_{\bullet j}$

Distance (du Phi-2) entre deux profils lignes :

$$d^2_{ii'} = \sum_{j=1}^{q} \frac{n}{n_{\bullet j}} \left(\frac{n_{ij}}{n_{i\bullet}} - \frac{n_{i'j}}{n_{i'\bullet}} \right)^2$$

Exemple :

	Droit	Sciences	Médecine	IUT	Effectifs marginaux lignes
Exp. agri.	80	99	65	58	302
Patron	168	137	208	62	575
Cadre sup.	470	400	876	79	1825
Employé	145	133	135	54	467
Ouvrier	166	193	127	129	615
Effectifs marginaux colonnes	1029	962	1411	382	3784

$$d^2_{12} = \frac{3784}{1029}\left(\frac{80}{302} - \frac{168}{575}\right)^2 + \frac{3784}{962}\left(\frac{99}{302} - \frac{137}{575}\right)^2 + \frac{3784}{1411}\left(\frac{65}{302} - \frac{208}{575}\right)^2 + \frac{3784}{382}\left(\frac{58}{302} - \frac{62}{575}\right)^2$$

Distance (du Phi-2) entre deux profils colonnes :

$$d^2_{jj'} = \sum_{i=1}^{p} \frac{n}{n_{i\bullet}} \left(\frac{n_{ij}}{n_{\bullet j}} - \frac{n_{ij'}}{n_{\bullet j'}} \right)^2$$

Exemple : distance entre les colonnes 1 et 2

	Droit	Sciences	Médecine	IUT	Effectifs marginaux lignes
Exp. agri.	80	99	65	58	302
Patron	168	137	208	62	575
Cadre sup.	470	400	876	79	1825
Employé	145	133	135	54	467
Ouvrier	166	193	127	129	615
Effectifs marginaux colonnes	1029	962	1411	382	3784

$$d^2_{12} = \frac{3784}{302}\left(\frac{80}{1029} - \frac{99}{962}\right)^2 + \frac{3784}{575}\left(\frac{168}{1029} - \frac{137}{962}\right)^2 + \frac{3784}{1825}\left(\frac{470}{1029} - \frac{400}{962}\right)^2 + \frac{3784}{467}\left(\frac{145}{1029} - \frac{133}{962}\right)^2 + \frac{3784}{615}\left(\frac{166}{1029} - \frac{193}{962}\right)^2$$

Propriété d'équivalence distributionnelle :

- Si on regroupe deux modalités lignes, les distances entre les profils-colonnes, ou entre les autres profils-lignes restent inchangées.

- Si on regroupe deux modalités colonnes, les distances entre les profils-lignes, ou entre les autres profils-colonnes restent inchangées.

Valeurs propres

	ValProp.	%age inertie	%age cumulé	Chi²
1	0,082	97,35	97,35	311,78
2	0,002	2,01	99,36	6,45
3	0,001	0,64	100,00	2,04

Inertie totale du nuage de points :

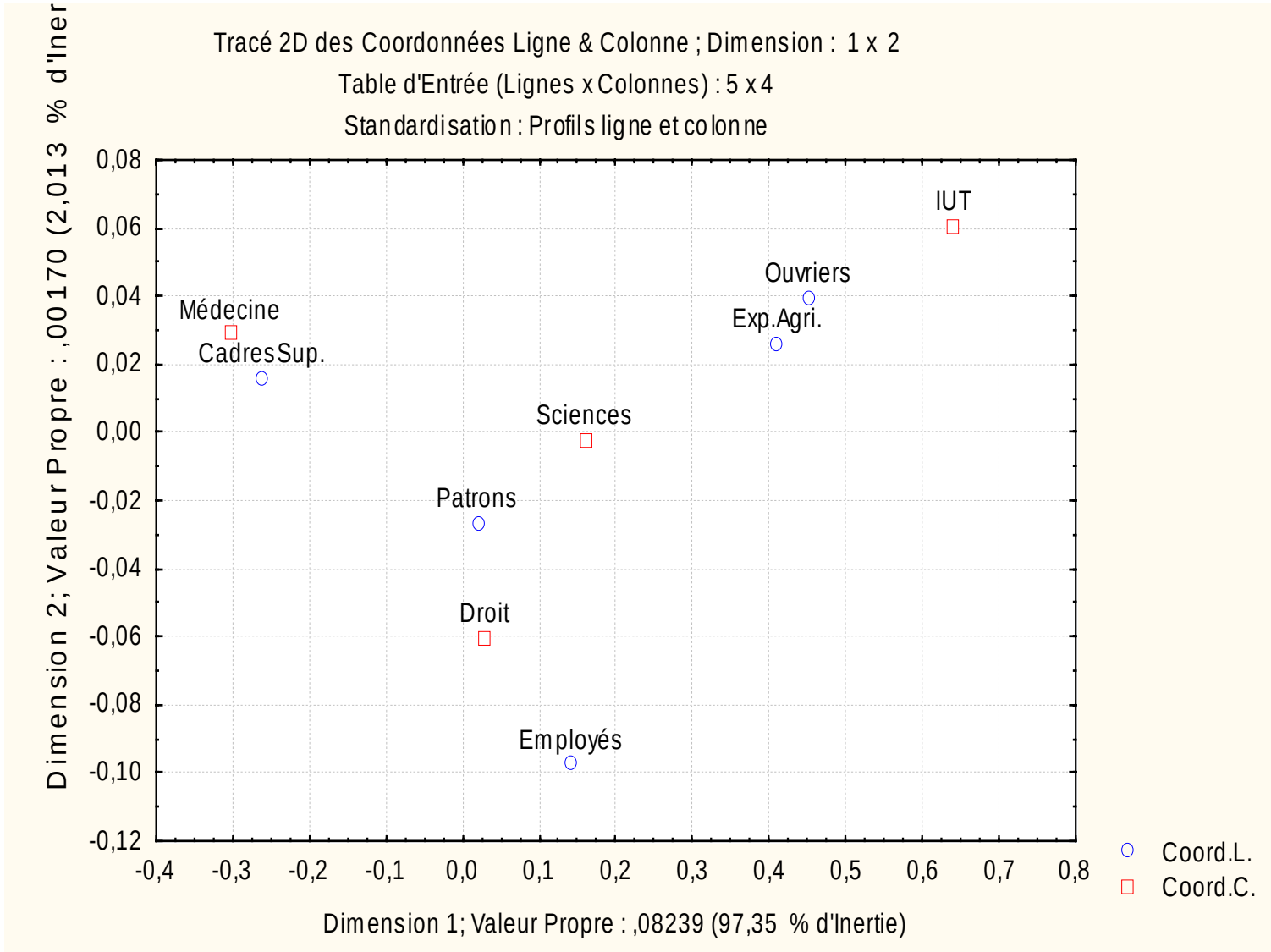
$$\Phi^2 = \frac{\chi^2}{N} = \sum \text{Valeurs Propres} = \sum GM_i^2$$

Résultats relatifs aux lignes

	Coord. Dim.1	Coord. Dim.2	Masse	Qualité	Inertie Relative	Inertie Dim.1	Cosinus² Dim.1	Inertie Dim.2	Cosinus² Dim.2
Exp. Agri.	0,410	0,026	0,080	0,991	0,161	0,163	0,987	0,032	0,004
Patrons	0,020	-0,027	0,152	0,336	0,006	0,001	0,123	0,063	0,213
Cadres Sup.	-0,263	0,016	0,482	0,999	0,395	0,404	0,996	0,069	0,004
Employés	0,142	-0,097	0,123	0,985	0,044	0,030	0,670	0,686	0,315
Ouvriers	0,451	0,040	0,163	1,000	0,395	0,402	0,992	0,150	0,008

Résultats relatifs aux colonnes

	Coord. Dim.1	Coord. Dim.2	Masse	Qualité	Inertie Relative	Inertie Dim.1	Cosinus² Dim.1	Inertie Dim.2	Cosinus² Dim.2
Droit	0,028	-0,061	0,272	0,942	0,015	0,003	0,165	0,588	0,777
Sciences	0,160	-0,003	0,254	0,948	0,082	0,079	0,948	0,001	0,000
Médecine	-0,303	0,030	0,373	1,000	0,409	0,416	0,990	0,193	0,009
IUT	0,640	0,061	0,101	0,998	0,494	0,502	0,989	0,219	0,009


Tracé 2D des Coordonnées Ligne & Colonne ; Dimension : 1 x 2
Table d'Entrée (Lignes x Colonnes) : 5 x 4
Standardisation : Profils ligne et colonne
Dimension 2; Valeur Propre : ,00170 (2,013 % d'Iner
Dimension 1; Valeur Propre : ,08239 (97,35 % d'Inertie)
0,08
0,06
0,04
0,02
0,00
-0,02
-0,04
-0,06
-0,08
-0,10
-0,12
-0,4
-0,3
-0,2
-0,1
0,0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
IUT
Ouvriers
Exp.Agri.
Médecine
CadresSup.
Sciences
Patrons
Droit
Employés
Coord.L.
Coord.C.

Analyse des correspondances multiples

Tableau protocole : 3 questions, 7 modalités

	Sexe	Revenu	Preference
s1	F	M	A
s2	F	M	A
s3	F	E	B
s4	F	E	C
s5	F	E	C
s6	H	E	C
s7	H	E	B
s8	H	M	B
s9	H	M	B
s10	H	M	A

Tableau disjonctif complet

	Sexe: F	Sexe: H	Rev: M	Rev:E	Pref:A	Pref:B	Pref:C
s1	1	0	1	0	1	0	0
s2	1	0	1	0	1	0	0
s3	1	0	0	1	0	1	0
s4	1	0	0	1	0	0	1
s5	1	0	0	1	0	0	1
s6	0	1	0	1	0	0	1
s7	0	1	0	1	0	1	0
s8	0	1	1	0	0	1	0
s9	0	1	1	0	0	1	0
s10	0	1	1	0	1	0	0

La disjonction complète

DEPARTEMENTS	BLE	VIN	LAIT
DEP 1	NON	ROUGE	PEU
DEP 2	OUI	ROSE	MOYEN
DEP 3	OUI	BLANC	MOYEN

LA DISJONCTION EST UNE CODIFICATION EN DONNEES BINAIRES

CREATION D'UNE VARIABLE POUR CHAQUE MODALITE

	BLE		VIN			LAIT		
DEPARTEMENTS	OUI	NON	ROUGE	ROSE	BLANC	PEU	MOYEN	BCP
DEP 1	0	1	1	0	0	1	0	0
DEP 2	1	0	0	1	0	0	1	0
DEP 3	1	0	0	0	1	0	1	0

Tableau d’effectifs ou tableau des patrons de réponses

Sexe	Revenu	Preference	Effectif
F	M	A	2
F	E	B	1
F	E	C	2
H	E	C	1
H	E	B	1
H	M	B	2
H	M	A	1

Tableau disjonctif des patrons de réponses

	Sexe: F	Sexe: H	Rev: M	Rev:E	Pref:A	Pref:B	Pref:C
FMA	2	0	2	0	2	0	0
FEB	1	0	0	1	0	1	0
FEC	2	0	0	2	0	0	2
HEC	0	1	0	1	0	0	1
HEB	0	1	0	1	0	1	0
HMB	0	2	2	0	0	2	0
HMA	0	1	1	0	1	0	0

Tableau de Burt

	F	H	M	E	A	B	C
Sexe:F	5	0	2	3	2	1	2
Sexe:H	0	5	3	2	1	3	1
Revenu:M	2	3	5	0	3	2	0
Revenu:E	3	2	0	5	0	2	3
Preference:A	2	1	3	0	3	0	0
Preference:B	1	3	2	2	0	4	0
Preference:C	2	1	0	3	0	0	3

Le tableau de BURT

Si **X** est une matrice disjonctive complète
La Matrice de BURT est $^{t}\mathbf{XX}$

				BLE		*VIN*			*LAIT*		
				OUI	*NON*	*Rouge*	*Rosé*	*Blanc*	*Peu*	*Moyen*	*Bcp*
				0	***1***	***1***	***0***	***0***	***1***	***0***	***0***
$^{t}\mathbf{X}$			**X**	***1***	***0***	***0***	***1***	***0***	***0***	***1***	***0***
				1	***0***	***0***	***0***	***1***	***0***	***1***	***0***
OUI	***0***	***1***	***1***	2	0	0	1	1	0	2	0
NON	***1***	***0***	***0***	0	1	1	0	0	1	0	0
Rouge	***1***	***0***	***0***	0	1	1	0	0	1	0	0
Rosé	***0***	***1***	***0***	1	0	0	1	0	0	1	0
Blanc	***0***	***0***	***1***	1	0	0	0	1	0	1	0
Pau	***1***	***0***	***0***	0	1	1	0	0	1	0	0
Moyen	***0***	***1***	***1***	2	0	0	1	1	0	2	0
Bcp	***0***	***0***	***0***	0	0	0	0	0	0	0	0

MATRICE DE BURT

$^{t}\mathbf{XX}$

Tous les tris simples
Tous les tris croisés

Propriété de l’analyse des correspondances (simple)

Lorsqu’il y a deux variables qualitatives réunies dans un tableau disjonctif $X = [X_1|X_2]$, l’analyse factorielle des correspondances du tableau disjonctif est équivalente à l’analyse des correspondances du tableau de contingence $N = {}^{T}X_1 \; X_2$

Analyse des correspondances multiples

Effectuer l'analyse des correspondances multiples, c'est effectuer l'analyse factorielle des correspondances du tableau disjonctif complet, muni des relations K<Q> (modalités emboîtées dans les questions) et I<K<q>> (individus emboîtés dans les modalités de chaque question).

Rouanet et Le Roux

Valeur du Phi-2 :

$$\Phi^2 = \frac{K - Q}{Q} = \frac{Nombre\ \ de\ \ modalités\ -\ \ Nombre\ \ de\ \ questions}{Nombre\ \ de\ \ questions}$$

Contributions absolues des modalités colonnes à l'inertie :

$$Cta(M_k) = \frac{1 - f_k}{Q}$$

Distances entre profils lignes :

$$d^2_{\Phi^2}(Patron\ \ i, Patron\ \ i') = \frac{1}{Nb\ \ de\ \ Questions} \sum \frac{1}{fréquence\ \ de\ \ la\ \ modalité\ \ k}$$

Somme étendue à toutes les modalités faisant partie de l'un des deux patrons, sans faire partie des deux patrons

Distance d'une ligne au profil moyen

$$d^2_{\Phi^2}(O,\ \ Patron\ \ i) = \left(\frac{1}{Nombre\ \ de\ \ Questions} \sum \frac{1}{fréquence\ \ de\ \ la\ \ modalité\ \ k} \right) - 1$$

Somme étendue à toutes les modalités faisant partie du patron i

Distances entre profils colonnes :

$$d^2_{\Phi^2}(M_k,\ M_{k'}) = \frac{1}{f_k} + \frac{1}{f_{k'}} - 2\frac{f_{kk'}}{f_k f_{k'}} = \frac{n_k + n_{k'} - 2n_{kk'}}{n_k n_{k'} / n}$$

$$d^2_{\Phi^2}(M_k,\ M_{k'}) = \frac{Effectif\ \ de\ \ k + Effectif\ \ de\ \ k' - 2 \times Effectif\ \ de\ \ la\ \ combinaison\ \ k\ \&\ k'}{Effectif\ \ de\ \ k \times\ Effectif\ \ de\ \ k'\ /\ Effectif\ \ total}$$

Distance d'une colonne au profil moyen :

$$d^2_{\Phi^2}(O,\ M_k) = \frac{1}{f_k} - 1 = \frac{n}{n_k} - 1 = \frac{Effectif\ \ total}{Effectif\ \ de\ \ k} - 1$$

Valeurs propres

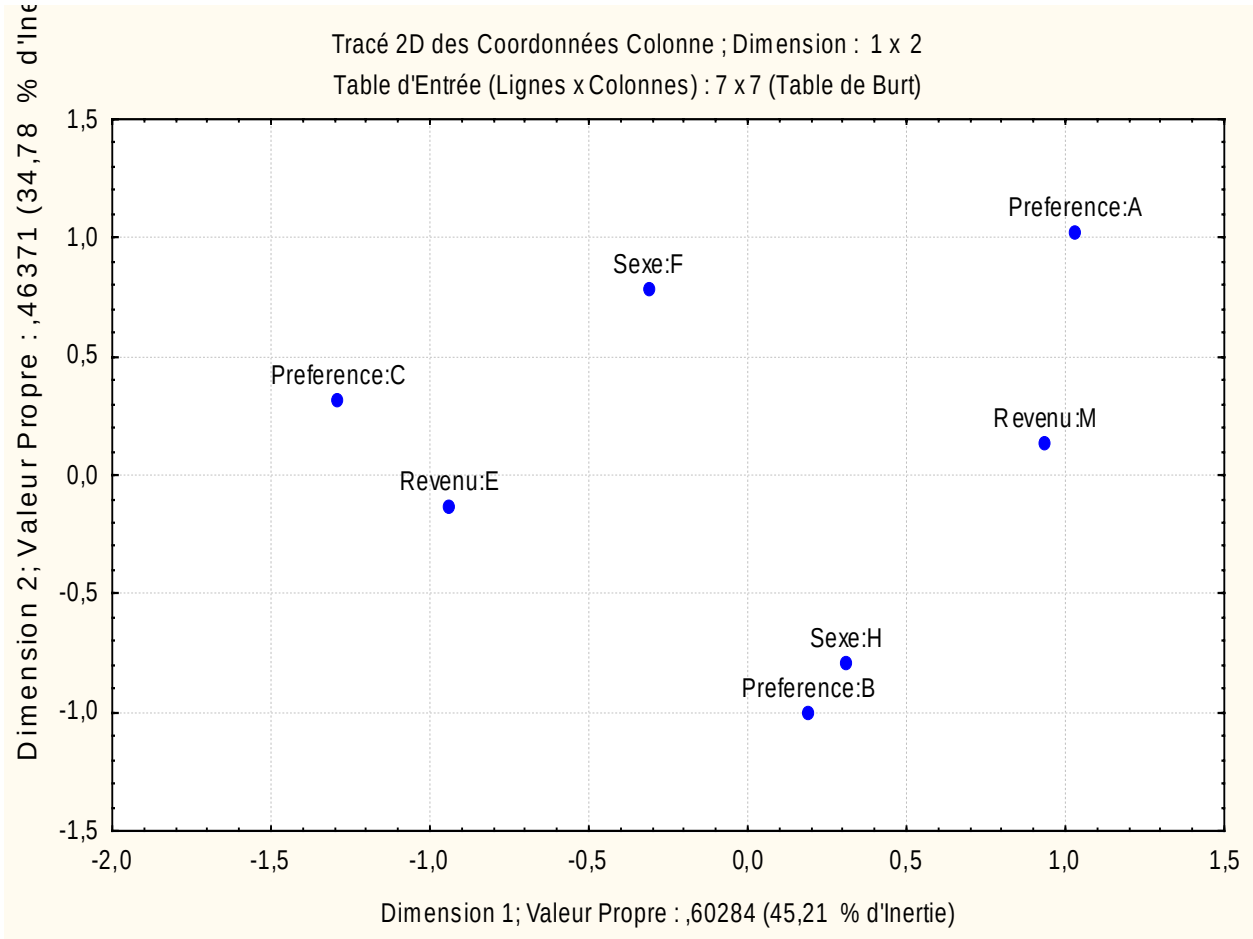
Valeurs Propres et Inertie de toutes les Dimensions (Protocole dans Mini-ACM.stw) Table d'Entrée (Lignes x Colonnes) : 7 x 7 (Table de Burt) Inertie Totale = 1,3333

	ValSing.	**ValProp.**	**%age**	**%age**	**Chi²**
1	0,776426	0,602837	45,21275	45,2128	25,37943
2	0,680961	0,463708	34,77810	79,9909	19,52211
3	0,450509	0,202959	15,22190	95,2128	8,54456
4	0,252646	0,063830	4,78725	100,0000	2,68724

Valeurs propres : décroissance lente -> taux d’inertie modifiés de Benzécri

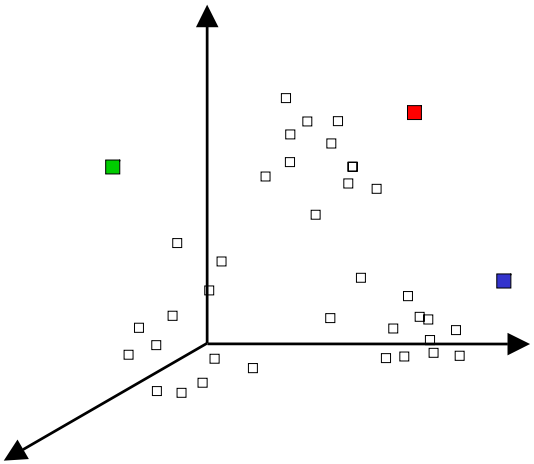
Calcul des taux modifiés :

	ValProp.	1/Q	(VP-1/Q)^2	%age
1	0,6028	0,3333	0,0726	81,04%
2	0,4637	0,3333	0,0170	18,96%
3	0,2030			
4	0,0638			
Somme	**1,3333**		**0,089630**	


Tracé 2D des Coordonnées Colonne ; Dimension : 1 x 2
Table d'Entrée (Lignes x Colonnes) : 7 x 7 (Table de Burt)
Dimension 2; Valeur Propre : ,46371 (34,78 % d'Ine
Dimension 1; Valeur Propre : ,60284 (45,21 % d'Inertie)
Preference:A
Sexe:F
Preference:C
Revenu:M
Revenu:E
Sexe:H
Preference:B
1,5
1,0
0,5
0,0
-0,5
-1,0
-1,5
-2,0
-1,5
-1,0
-0,5
0,0
0,5
1,0
1,5

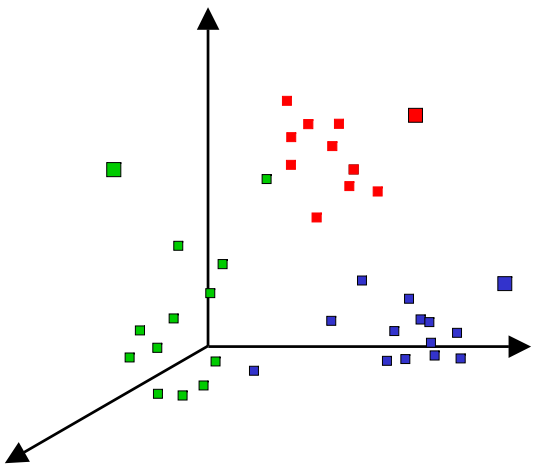
Méthodes de classification

Méthodes de type « centres mobiles »



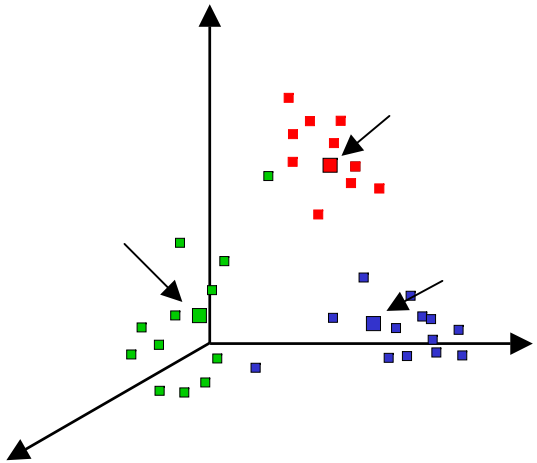
Au départ

Création aléatoire de centres de gravité.



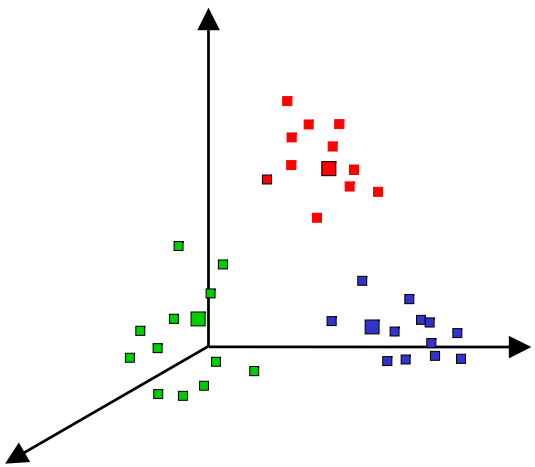
Etape 1

Chaque observation est classée en fonction de sa proximité aux centres de gravités.



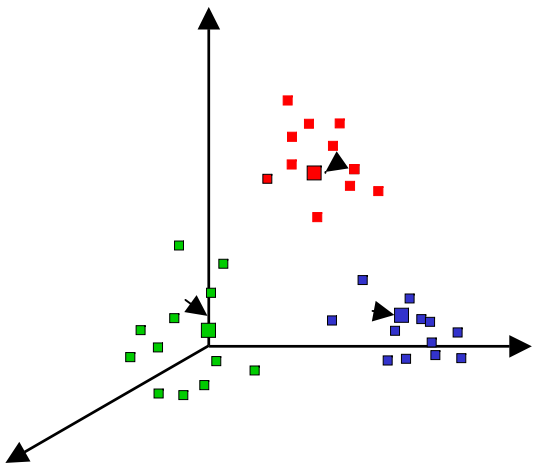
Etape 2

Chaque centre de gravité est déplacé de manière à être au centre du groupe correspondant



Etape 1’

On répète l’étape 1 avec les nouveaux centres de gravité.



Etape 2’

De nouveau, chaque centre de gravité est recalculé.

On continue jusqu’à ce que les centres de gravité ne bougent plus.

Classification Ascendante Hiérarchique

Les quatre étapes de la méthode :

-Choix des variables représentant les individus

- Choix d'un indice de dissimilarité

-Choix d'un indice d'agrégation

-Algorithme de classification et résultat produit

Quelques distances ou indices de dissimilarité

- Distance Euclidienne. $$d(I_i,I_j)=\sqrt{\sum_k (x_{ik}-x_{jk})^2}$$

- Distance Euclidienne au carré. $$d(I_i,I_j)=\sum_k (x_{ik}-x_{jk})^2$$

- Distance du City-block (Manhattan) : $$d(I_i,I_j)=\sum_k \left|x_{ik}-x_{jk}\right|$$

- Distance de Tchebychev : $$d(I_i,I_j)=Max\ \left|x_{ik}-x_{jk}\right|$$

- Distance à la puissance. $$d(I_i,I_j)=\left(\sum_k \left|x_{ik}-x_{jk}\right|^p\right)^{1/r}$$

- Percent disagreement. $$d(I_i,I_j)=\frac{Nombre\ \ de\ \ x_{ik}\neq x_{jk}}{K}$$

- 1- r de Pearson : $$d(I_i,I_j)=1-r_{ij}$$

Quelques indices d'agrégation

- Diamètre ou « complete linkage » : $D(A,B) = \max_{I \in A} \max_{J \in B} d(I,J)$

- Moyenne non pondérée des groupes associés: $D(A,B) = \frac{1}{n_A n_B} \sum_{I \in A, J \in B} d(I,J)$

- Moyenne pondérée des groupes associés : $D(A,B) = \frac{1}{(n_A + n_B)(n_A + n_B - 1)} \sum_{I,J \in A \cup B} d(I,J)$

- Centroïde non pondéré des groupes associés.

- Centroïde pondéré des groupes associés (médiane).

- Méthode de Ward (méthode du moment d'ordre 2). Si une classe M est obtenue en regroupant les classes K et L, sa distance à la classe J est donnée par :

$$D(M,J) = \frac{(N_J + N_K)D(K,J) + (N_J + N_L)D(L,J) - N_J D(K,L)}{N_J + N_K + N_L}$$

L'algorithme de classification

Étape 1 : n éléments à classer ;

Étape 2 : Construction de la matrice de distances entre les n éléments et recherche les deux plus proches, que l'on agrège en un nouvel élément. On obtient une première partition à n-1 classes;

Étape 3 : Construction d'une nouvelle matrice des distances qui résultent de l'agrégation, en calculant les distances entre le nouvel élément et les éléments restants (les autres distances sont inchangées). Recherche des deux éléments les plus proches, que l'on agrège. On obtient une deuxième partition avec n-2 classes et qui englobe la première;

…

Étape m : on calcule les nouvelles distances, et l'on réitère le processus jusqu'à n'avoir plus qu'un seul élément regroupant tous les objets et qui constitue la dernière partition.

Distance Euclidienne au carré et méthode de Ward

Inertie totale = Inertie « intra » + Inertie « inter »

A chaque étape, on réunit les deux classes de façon à augmenter le moins possible l'inertie « intra »

$$I = \sum_{j=1}^{g} \sum_{i=1}^{n_j} G_j M_{ij}^2 + \sum_{j=1}^{g} n_j G G_j^2$$

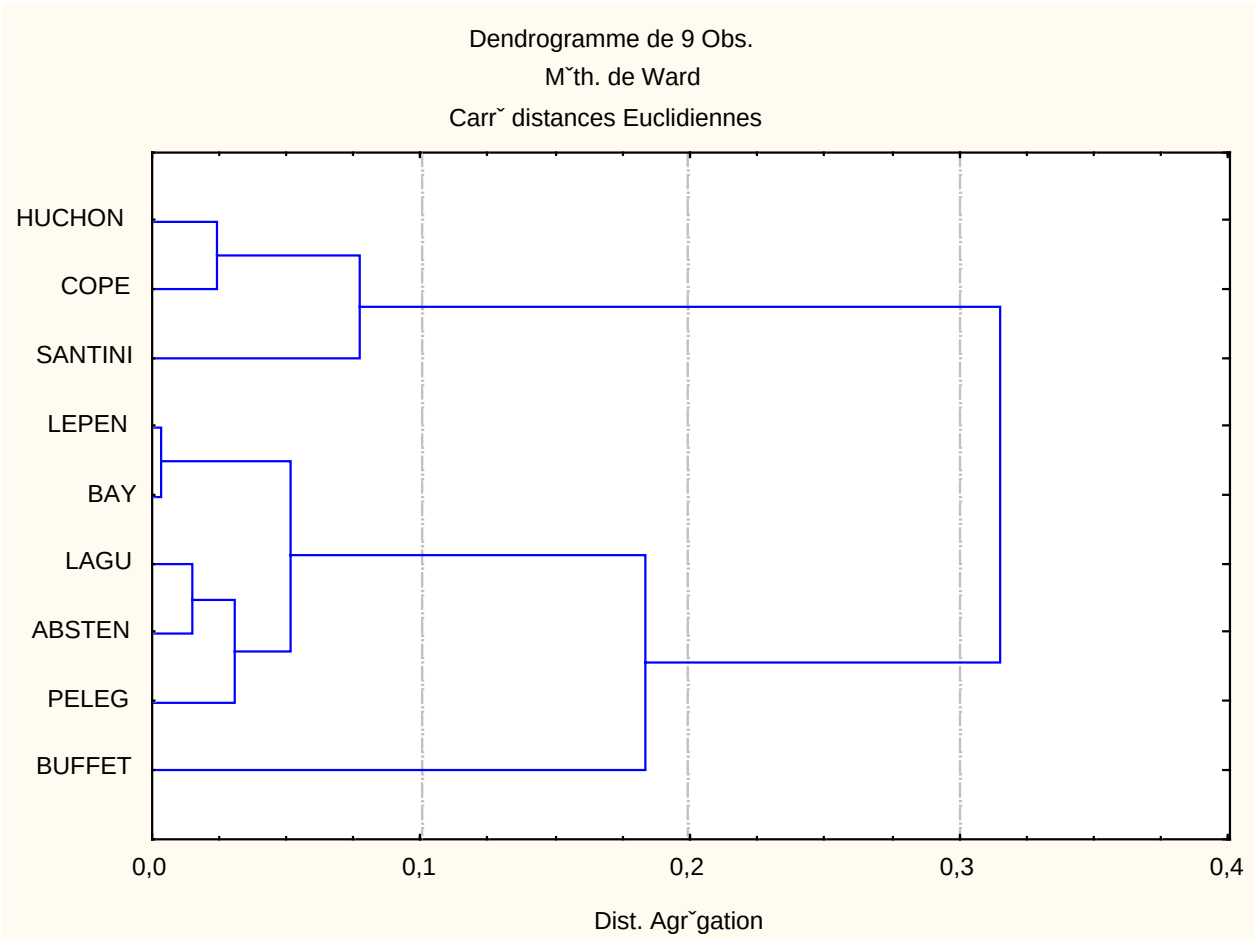
$$\begin{matrix} \text{Inertie} \\ \text{totale} \end{matrix} = \sum_{\text{les classes}} \begin{matrix} \text{Inertie} \\ \text{dans} \end{matrix} + \begin{matrix} \text{Inertie des points moyens} \\ \text{pondérés par} \\ \text{les effectifs des classes} \end{matrix}$$

Résultat obtenu :

Une hiérarchie de classes telles que :
- toute classe est non vide
- tout individu appartient à une (et même plusieurs) classes
- deux classes distinctes sont disjointes, ou vérifient une relation d'inclusion (l'une d'elles est incluse dans l'autre)
- toute classe est la réunion des classes qui sont incluses dans elle.

Ce résultat est fréquemment représenté à l’aide d’un dendrogramme

Exemple de dendrogramme



Régression linéaire Multiple

Echantillon de n individus statistiques :

- p variables numériques X1, X2, ..., Xp (variables indépendantes ou explicatives)

- une variable numérique Y (variable dépendante, ou "à expliquer").

Exemple (30 comtés américains) :
VARI_POP : Variation de la Population (1960-1970)
N_AGRIC : Nb. de personnes travaillant dans le secteur primaire
TX_IMPOS : Taux d'imposition des propriétés
PT_PHONE : Pourcentage d'installations téléphoniques
PT_RURAL : Pourcentage de la population vivant en milieu rural
AGE : Age médian
PT_PAUVR : Pourcentage de familles en dessous du seuil de pauvreté

Matrice des corrélations

	VARI_POP	N_AGRIC	**PT_PAUVR**	TX_IMPOS	PT_PHONE	PT_RURAL	AGE
VARI_POP	1,00	0,04	**-0,65**	0,13	0,38	-0,02	-0,15
N_AGRIC	0,04	1,00	**-0,17**	0,10	0,36	-0,66	-0,36
PT_PAUVR	**-0,65**	**-0,17**	**1,00**	**0,01**	**-0,73**	**0,51**	**0,02**
TX_IMPOS	0,13	0,10	**0,01**	1,00	-0,04	0,02	-0,05
PT_PHONE	0,38	0,36	**-0,73**	-0,04	1,00	-0,75	-0,08
PT_RURAL	-0,02	-0,66	**0,51**	0,02	-0,75	1,00	0,31
AGE	-0,15	-0,36	**0,02**	-0,05	-0,08	0,31	1,00

Le modèle linéaire :

On cherche à exprimer Y sous la forme :

$$Y = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + ... + b_p X_p + E$$

où E (erreur commise en remplaçant Y par la valeur estimée) est nulle en moyenne, et de variance minimale.

Solution au problème :

Les coefficients b_i (1=i=p) sont les solutions du système d'équations :

$$\begin{cases} Cov(X_1, X_1)b_1 + Cov(X_1, X_2)b_2 + ... + Cov(X_1, X_p)b_p = Cov(X_1, Y) \\ Cov(X_2, X_1)b_1 + Cov(X_2, X_2)b_2 + ... + Cov(X_2, X_p)b_p = Cov(X_2, Y) \\ .... \\ Cov(X_p, X_1)b_1 + Cov(X_p, X_2)b_2 + ... + Cov(X_p, X_p)b_p = Cov(X_p, Y) \end{cases}$$

et

$$b_0 = \overline{Y} - b_1\overline{X_1} - b_2\overline{X_2} - ... - b_p\overline{X_p}$$

Sur l'exemple proposé :

PT_PAUVR = 31,2660 - 0,3923 VARI_POP + 0,0008 N_AGRIC+ 1,2301 TX_IMPOS - 0,0832 PT_PHONE + 0,1655 PT_RURAL - 0,4193 AGE

Coefficients standardisés :

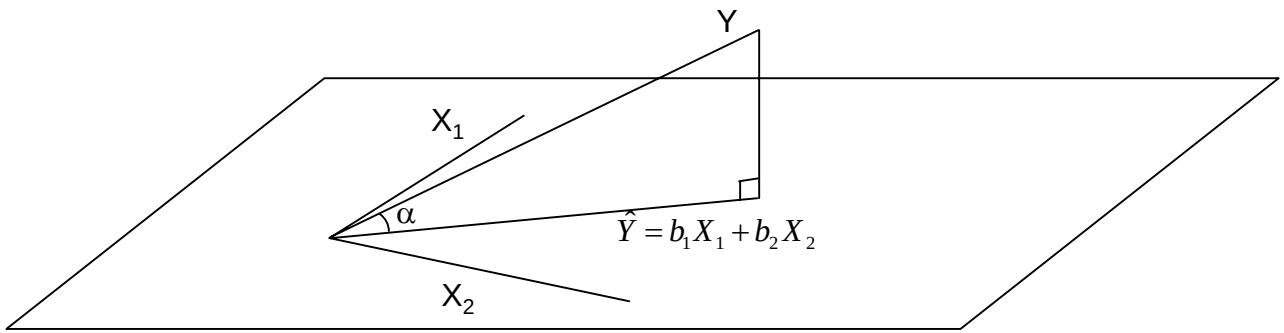
$$\beta_i = \frac{\sigma(X_i)}{\sigma(Y)} b_i$$

VARI_POP	N_AGRIC	TX_IMPOS	PT_PHONE	PT_RURAL	AGE
-0,630788	0,238314	0,038799	-0,129627	0,618746	-0,188205

Test des coefficients de la régression

	PT_PAUVR	PT_PAUVR	PT_PAUVR	PT_PAUVR	-95,00%	+95,00%
	(param.)	Err-Type	t	p	Lim.Conf	Lim.Conf
Ord.Orig.	31,2660	13,2651	**2,3570**	0,0273	3,8251	58,7070
VARI_POP	-0,3923	0,0805	**-4,8742**	0,0001	-0,5589	-0,2258
N_AGRIC	0,0008	0,0004	1,6903	0,1045	-0,0002	0,0017
TX_IMPOS	1,2301	3,1899	0,3856	0,7033	-5,3686	7,8288
PT_PHONE	-0,0832	0,1306	-0,6376	0,5300	-0,3533	0,1868
PT_RURAL	0,1655	0,0618	**2,6766**	0,0135	0,0376	0,2935
AGE	-0,4193	0,2554	-1,6415	0,1143	-0,9476	0,1091

Approche factorielle de la régression



Expliquer la variabilité de Y à partir de celle des X_j :

Combinaison linéaire des X_j qui reproduit « au mieux » la variabilité des individus selon Y : combinaison linéaire la plus corrélée avec Y.

Solution : combinaison linéaire des X_j qui fait avec Y un angle minimum.

Test de la régression :

Variance de Y = Variance expliquée + Variance résiduelle

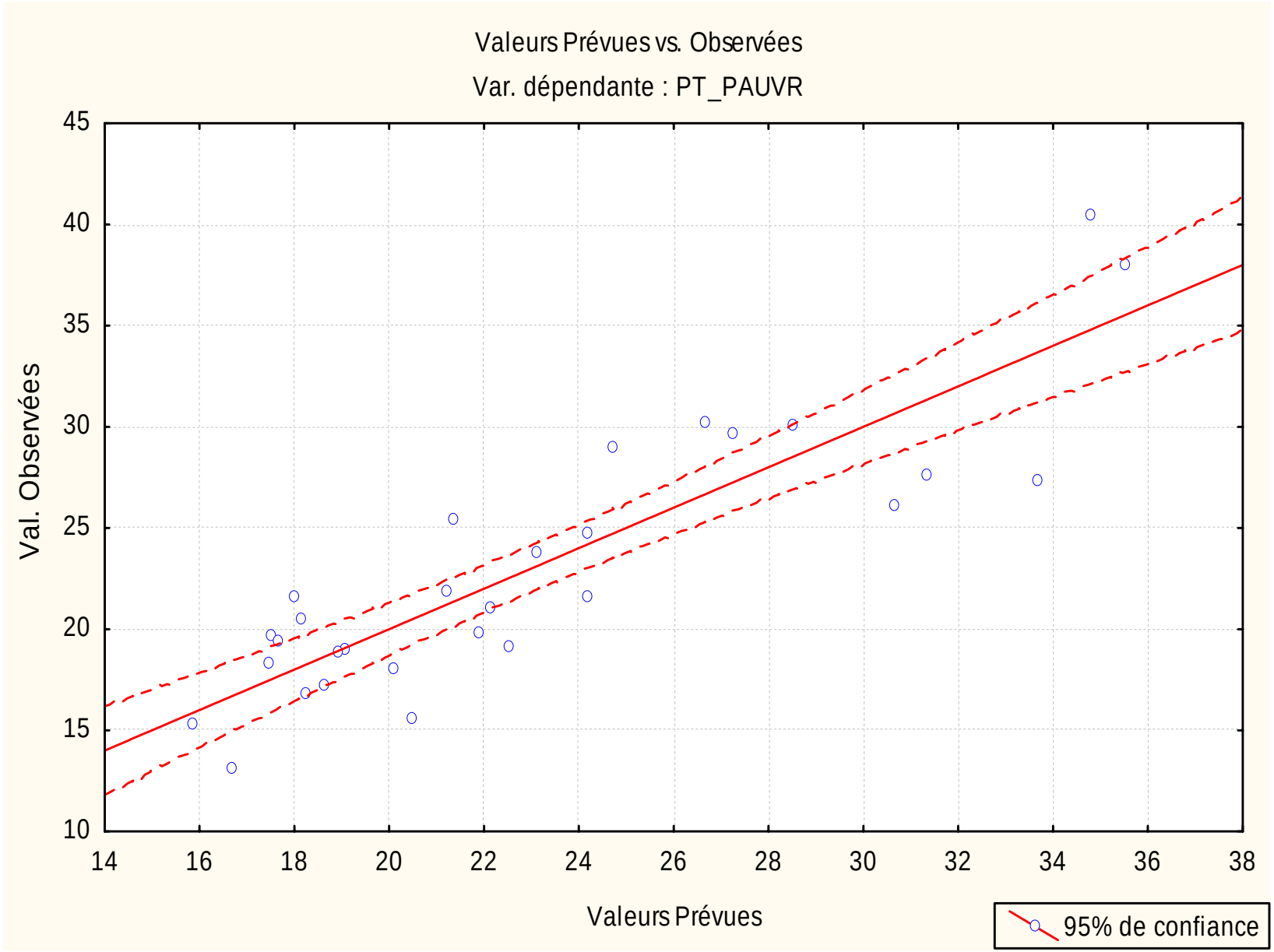
$$Var(Y) = Var(\hat{Y}) + Var(Y - \hat{Y})$$

Analyse de variance

	Sommes Carrés	dl	Moyennes Carrés	F	niveau p
Régress.	932,065	6	155,3441	13,44909	0,000002
Résidus	265,662	23	11,5505		
Total	1197,727				

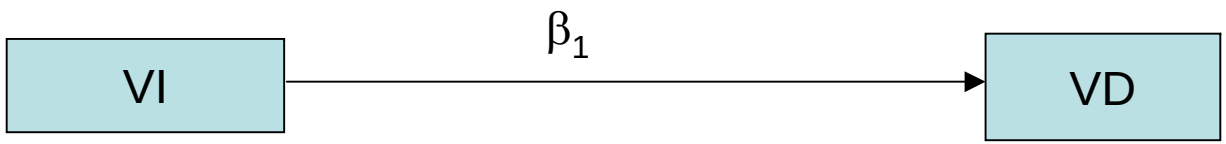
Coefficient de détermination :

$$R^2 = \frac{Var(\hat{Y})}{Var(Y)} = 0,7782$$


Valeurs Prévues vs. Observées
Var. dépendante : PT_PAUVR
Val. Observées
Valeurs Prévues
95% de confiance
45
40
35
30
25
20
15
10
14
16
18
20
22
24
26
28
30
32
34
36
38

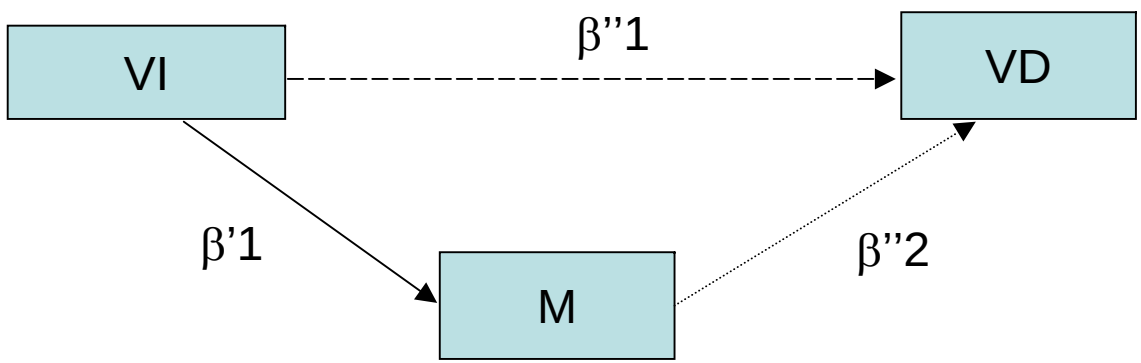
Analyse de médiation

1) Régression de la VD sur la VI : VD = b0 + b1 VI
Coefficient de régression standardisé : β1



2) Régression de la médiation sur la VI : M=b'0 + b'1 VI
Coefficient de régression standardisé : β'1

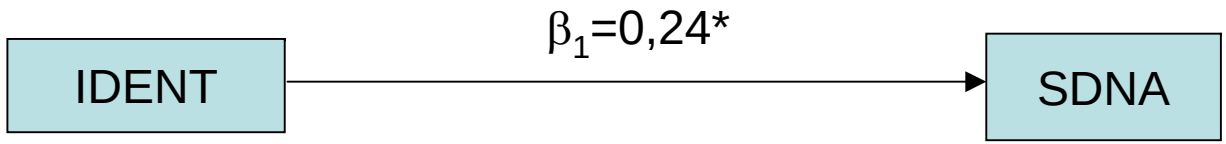
3) Régression multiple de la VD sur VI et M : VD = b''0 + b''1 VI + b''2 M
Coefficients de régression standardisés : β''1, β''2



Interprétation :

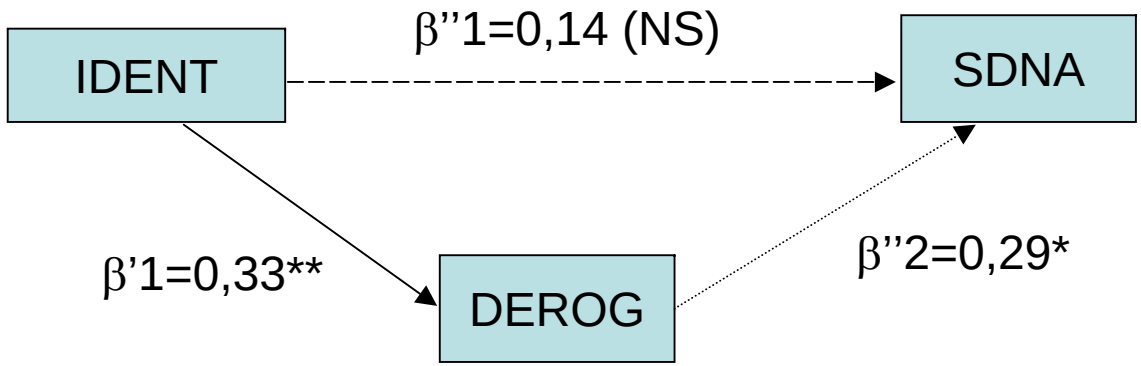
Si b’’1 est nettement plus proche de 0 que b1, en particulier si b’’1 n’est pas significativement différent de 0 alors que b1 l’était, il y a médiation (partielle ou totale)

1) Régression de la VD sur la VI : SDNA = b0 + b1 IDENT
Coefficient de régression standardisé : $\beta 1$

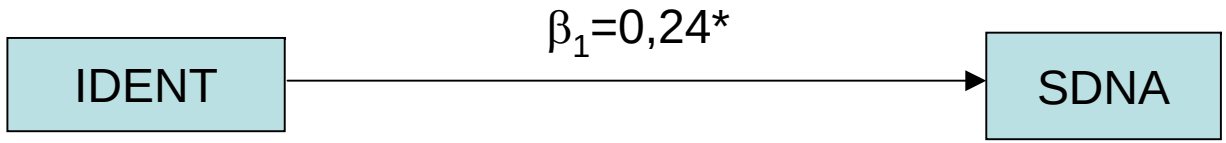


2) Régression de la médiation sur la VI : DEROG=b'0 + b'1 IDENT
Coefficient de régression standardisé : β'1

3) Régression multiple de la VD sur VI et M :
SDNA = b''0 + b''1 IDENT + b''2 DEROG
Coefficients de régression standardisés : β''1, β''2

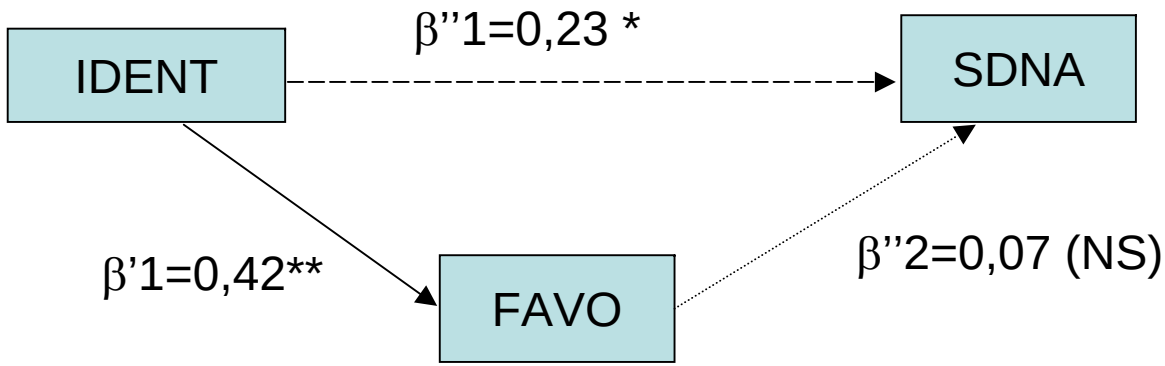


1) Régression de la VD sur la VI : SDNA = b0 + b1 IDENT
Coefficient de régression standardisé : β1



2) Régression de la médiation sur la VI : DEROG=b'0 + b'1 IDENT
Coefficient de régression standardisé : β'1

3) Régression multiple de la VD sur VI et M :
SDNA = b''0 + b''1 IDENT + b''2 DEROG
Coefficients de régression standardisés : β''1, β''2



Pas d'effet de médiation

Régression Logistique

Sur un échantillon de n individus statistiques, on a observé :

- p variables numériques ou dichotomiques X1, X2, ..., Xp (variables indépendantes ou explicatives)

- une variable dichotomique Y (variable dépendante, ou "à expliquer").

Exemple :

Echantillon de 30 sujets pour lesquels on a relevé :

- d'une part le niveau des revenus (variable numérique)

- d'autre part la possession ou non d'un nouvel équipement électro-ménager.

Exemple

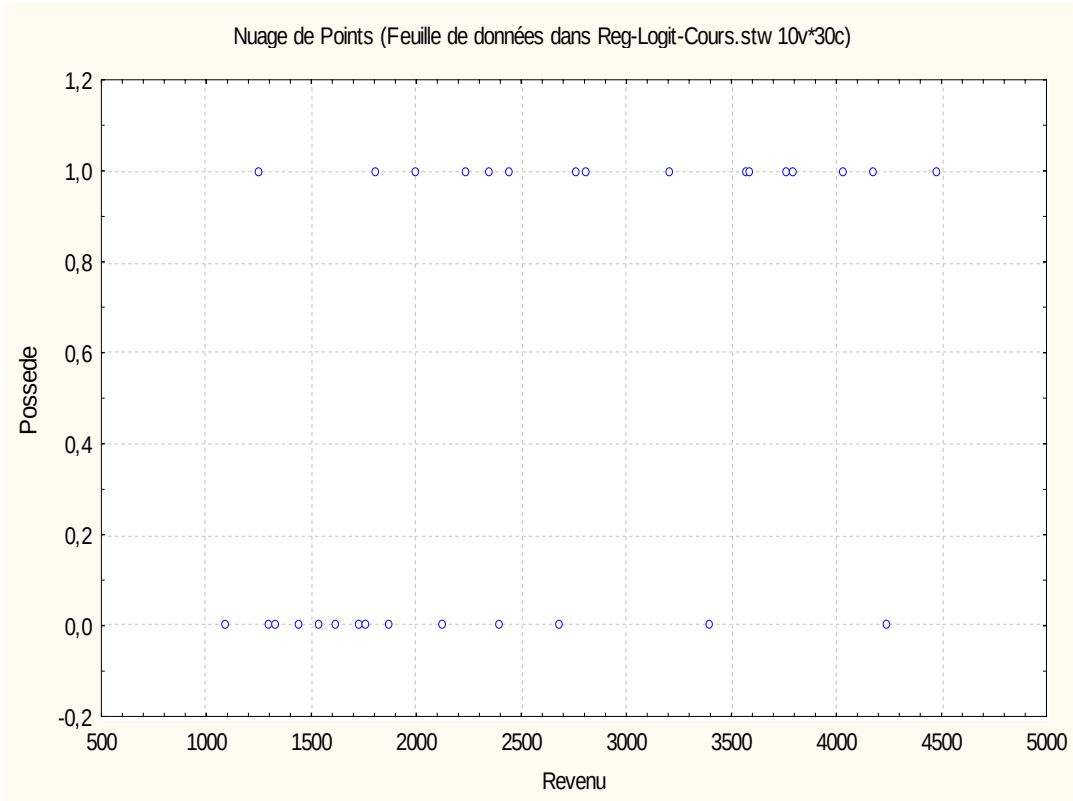
Revenu	1085	1304	1331	1434	1541	1612	1729	1759
Possède	0	0	0	0	0	0	0	0

Revenu	1863	2121	2395	2681	3390	4237	1241
Possède	0	0	0	0	0	0	1

Revenu	1798	1997	2234	2346	2436	2753	2813	3204
Possède	1	1	1	1	1	1	1	1

Revenu	3564	3592	3762	3799	4037	4168	4484
Possède	1	1	1	1	1	1	1

Nuage de points



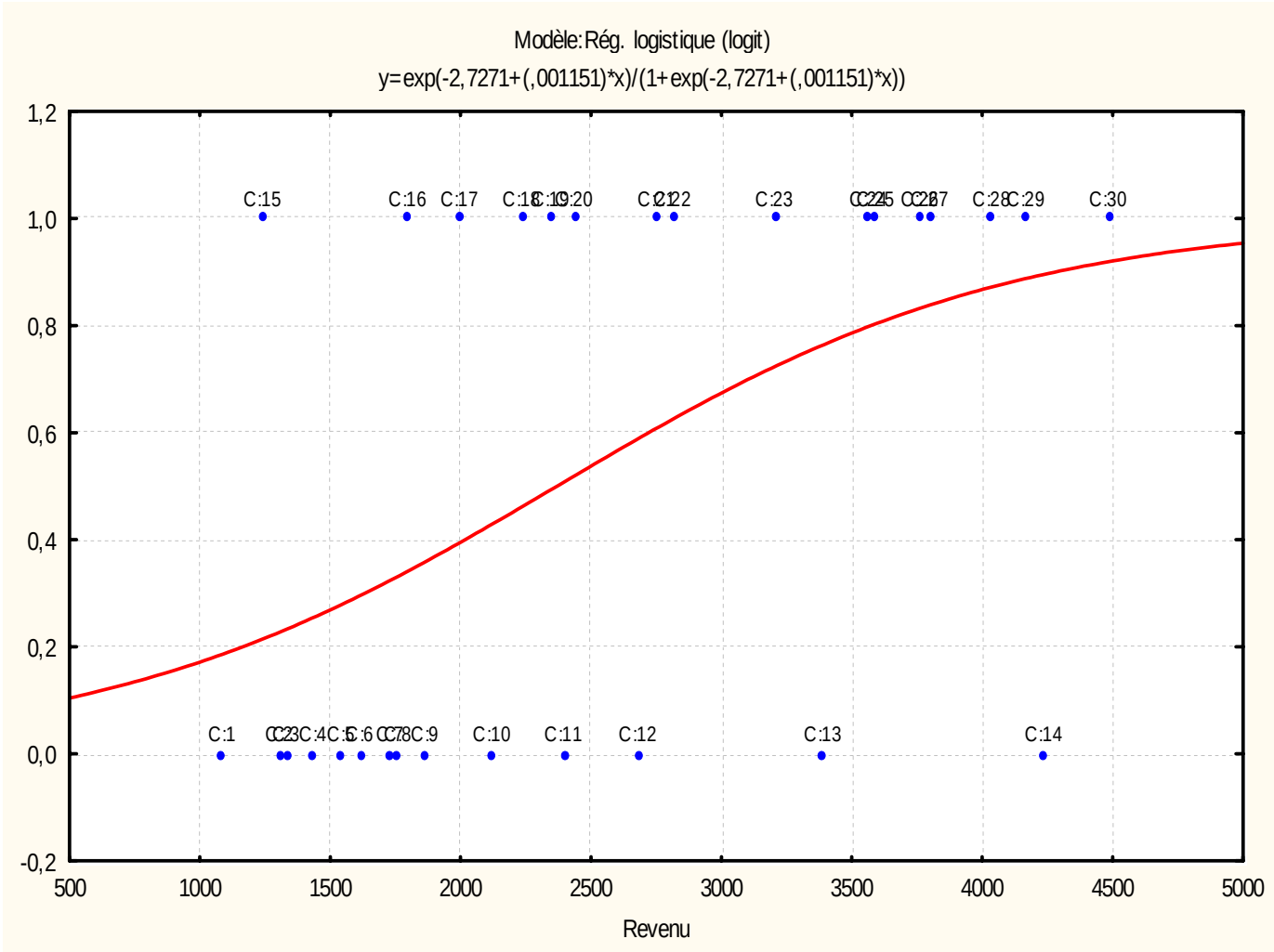
Rapport de chances et transformation logit

Rapport de chances ou cote :

$$p_1 = \frac{P(Y=1)}{1-P(Y=1)}$$

Transformation logit

$$\text{logit}(P) = \ln\left(\frac{P}{1-P}\right)$$



$$\text{logit}(Y) = -2{,}7271 + 0{,}001151\ X$$

Aide à l'interprétation : odds-ratio ou rapport de cotes

La contribution de la variable X à la variation de Y est calculée par :

$$\mathrm{OR} = \exp(\text{Coefficient de X dans le modèle})$$

L'odds-ratio correspondant au coefficient 0,001151 est : $e^{0,001151}$=1,0012.

Autrement dit, une augmentation du revenu de 1 unité se traduit par une multiplication de la probabilité par 1,0012.

L'odds-ratio est défini comme le rapport de deux rapports de chances. Ainsi, l'odds-ratio relatif à l'étendue des valeurs observées est défini de la manière suivante :

- On calcule le rapport de chances relatif à la plus grande valeur observée du revenu :

Pour X = 4484, P1=0,919325 et $\frac{P_1}{1-P_1} = 11{,}3954$

- On calcule le rapport de chances relatif à la plus petite valeur observée du revenu :

Pour X = 1085, P2=0,185658 et $\frac{P_2}{1-P_2} = 0{,}2280$

- L'odds-ratio est obtenu comme quotient des deux rapports précédents :

$$\mathrm{OR} = \frac{\frac{P_1}{1-P_1}}{\frac{P_2}{1-P_2}} = \frac{11{,}3954}{0{,}2280} = 49{,}98$$

Analyse de segmentation

- Echantillon de n individus statistiques

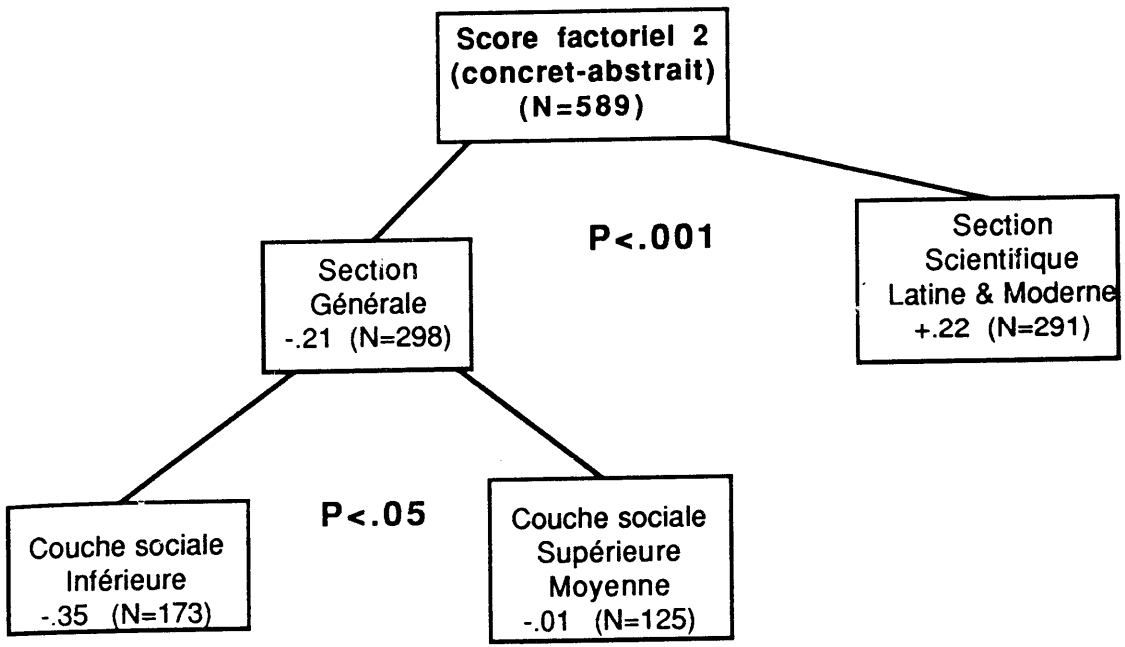
- une variable dépendante numérique ou qualitative Y

- plusieurs variables numériques ou catégorielles X1, X2, ..., Xp.

Expliquer la variable Y à l’aide d’une ou plusieurs variables quantitatives ou qualitatives.

Créer des groupes d’individus ou d’observations homogènes.

Résultat est fourni sous la forme d'un arbre de décision binaire du type suivant :


Score factoriel 2
(concret-abstrait)
(N=589)
P<.001
Section
Générale
-.21 (N=298)
Section
Scientifique
Latine & Moderne
+.22 (N=291)
P<.05
Couche sociale
Inférieure
-.35 (N=173)
Couche sociale
Supérieure
Moyenne
-.01 (N=125)

Rappel : théorème de Huygens

L'inertie totale est la somme des inerties intra-groupes et de l'inertie des points moyens des groupes, pondérés par l'effectif des groupes.

$$I = \sum_{j=1}^{g} I_j + \sum_{j=1}^{g} n_j \left(\overline{y}_j - \overline{y}\right)^2$$

$$\begin{matrix}\text{Inertie} \\ \text{totale}\end{matrix} = \sum_{\text{les groupes}} \begin{matrix}\text{Inertie} \\ \text{dans}\end{matrix} + \begin{matrix}\text{Inertie des points moyens} \\ \text{pondérés par} \\ \text{les effectifs des groupes}\end{matrix}$$

Exemple : 4 observations suivantes, réparties en deux groupes A et B :

Groupe	A	B	A	B
Y	1	2	3	4

$$\overline{y} = 2{,}5$$

$$\text{Inertie totale} = (1-2{,}5)^2 + (2-2{,}5)^2 + (3-2{,}5)^2 + (4-2{,}5)^2 = 5$$

$$I_A = (1-2)^2 + (3-2)^2 = 2$$

$$I_B = (2-3)^2 + (4-3)^2 = 2$$

$$I_{Inter} = 2 \times (2-2{,}5)^2 + 2 \times (3-2{,}5)^2 = 1$$

Algorithme de segmentation

1) Au départ : un seul segment contenant l'ensemble des individus.

2) Examen de toutes les variables explicatives et de toutes les divisions possibles (de la forme Xj< A et Xj > A si Xj est numérique, regroupement des modalités en deux sous-ensembles si Xj est catégorielle).

Pour chaque division, l'inertie inter-groupes est calculée.

3) La division choisie est celle qui maximise l'inertie inter-groupes.

4) On recommence la procédure dans chacun des deux groupes ainsi définis.

Critères d'arrêt :

On peut utiliser comme critères d’arrêt de l’algorithme de segmentation :

- La taille des groupes (classes) à découper

- Le rapport entre l'inertie intra et la variance totale

- Des tests statistiques (tests de Student de comparaison de moyennes, tests du Khi deux)

Determinants of Wages from the 1985 Current Population Survey

Variable names in order from left to right:

EDUCATION: Number of years of education.
SOUTH: Indicator variable for Southern Region (1=Person lives in South, 0=Person lives elsewhere).
SEX: Indicator variable for sex (1=Female, 0=Male).
EXPERIENCE: Number of years of work experience.
UNION: Indicator variable for union membership (1=Union member, 0=Not union member).
WAGE: Wage (dollars per hour).
AGE: Age (years).
RACE: Race (1=Other, 2=Hispanic, 3=White).
OCCUPATION: Occupational category (1=Management, 2=Sales, 3=Clerical, 4=Service, 5=Professional, 6=Other).
SECTOR: Sector (0=Other, 1=Manufacturing, 2=Construction).
MARR: Marital Status (0=Unmarried, 1=Married)

Diagramme de l'arbre 1 pour Salaire

Nb de noeuds non-terminaux : 7, Noeuds terminaux : 8

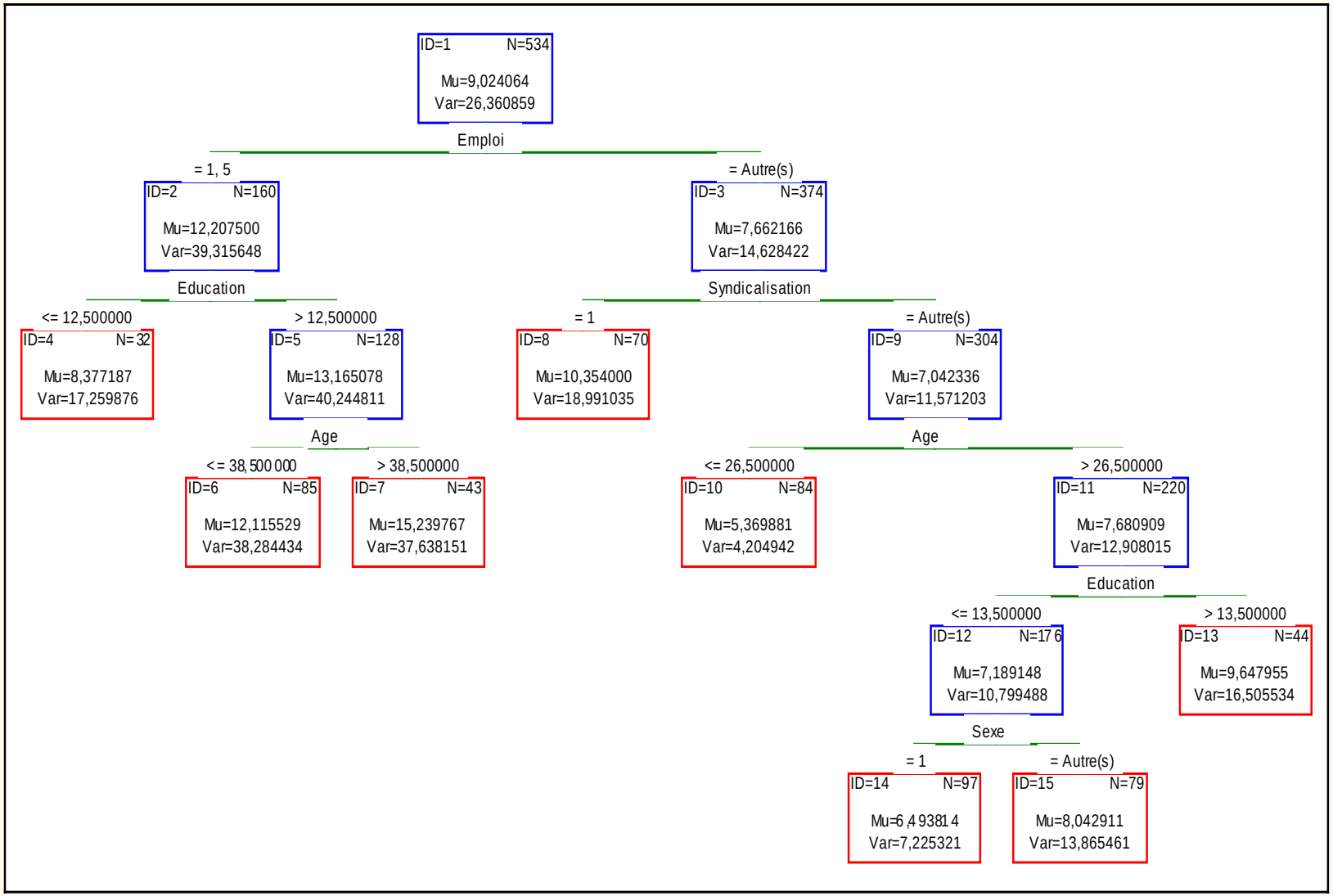


Diagramme de l'arbre 1 pour Log-salaire

Nb de noeuds non-terminaux : 8, Noeuds terminaux : 9