Test unilatéral de Kolmogorov-Smirnov

H_0 : La distribution de la VD est la même dans les deux populations parentes
H_1 : L'intensité de la VD est plus forte dans la deuxième population

Construction de la statistique de test

Soient n_1 et n_2 les tailles des deux échantillons.

On choisit un regroupement en classes : $b_1, b_2, \ldots, b_k$

On construit le tableau des fréquences cumulées dans les deux groupes :

	Gr 1	Gr 2
$X \leq b_1$	F_{11}	F_{12}
$X \leq b_2$	F_{21}	F_{22}
...	...	...
$X \leq b_k$	F_{k1}	F_{k2}

On calcule le maximum des différences, ordonnées en fonction du sens du test :

$$D = \max\left[F_{i1} - F_{i2}\right]$$

Pour $n_1 \leq 25$ et $n_2 \leq 25$, les valeurs critiques de $J = n_1 n_2 D$ sont tabulées.

Pour de grands échantillons ($n_1 > 25$ et $n_2 > 25$), on utilise l'approximation suivante : sous H_0, la statistique :

$$\chi^2 = 4D^2 \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}$$

suit une loi du χ^2 à 2 ddl.

Exemple

Apprentissage séquentiel par des élèves du 11è grade et des élèves du 7è grade.

Hypothèse : la matière apprise au début de la série est rappelée plus efficacement, mais cet effet est moins prononcé chez les sujets jeunes.

Variable dépendante : pourcentage d'erreurs commises sur la première partie de la série.

On fait ici un test unilatéral. L'hypothèse H_1 est : le pourcentage d'erreurs est significativement plus élevé dans le 2è groupe.

Données :

11è grade	7è grade
35.2	39.1
39.2	41.2
40.9	46.2
38.1	48.4
34.4	48.7
29.1	55.0
41.8	40.6
24.3	52.1
32.4	47.2
	45.2

Découpage en classes et fréquences cumulées :

	11è grade	7è grade	Diff.
$X \leq 28$	0.111	0	0.111
$X \leq 32$	0.222	0	0.222
$X \leq 36$	0.556	0	0.555
$X \leq 40$	0.778	0.1	0.678
$X \leq 44$	1	0.3	0.700
$X \leq 48$	1	0.6	0.400
$X \leq 52$	1	0.8	0.200
$X \leq 56$	1	1	0

On obtient : $D = 0.7$ d'où $J = 9 \times 10 \times 0.7 = 63$.

Au seuil de 1%, la table indique : $J_{crit} = 61$.

On conclut donc sur H_1.

Test des suites de Wald-Wolfowitz

Anderson, Wald et Wolfowitz ont proposé (1943) un test d'auto-corrélation utilisé notamment sur des séries chronologiques. Le test étudié ci-dessous (*test des suites*) en est une version simplifiée.

Certains auteurs distinguent deux tests des suites :

• L'un est un test sur un échantillon, sur lequel sont observées une variable dichotomique et une variable ordinale ou numérique. Il s'agit alors d'étudier si les deux variables sont indépendantes.

• L'autre est un test sur deux échantillons, et permet d'étudier si la VD a les mêmes caractéristiques dans les deux populations parentes. Dans ce cas, en général, seule l'hypothèse H_1 unilatérale à gauche a un sens.

H_0 : L'appartenance d'une observation à l'un ou l'autre groupe est indépendante de son rang.

H_1 bilatérale : L'appartenance d'une observation à l'un ou l'autre groupe dépend de son rang.
H_1 unilatérale à gauche : Etant donné deux observations consécutives, la probabilité qu'elles appartiennent au même groupe est supérieure à celle résultant du hasard.
H_1 unilatérale à droite : L'alternance entre les observations de l'un et l'autre groupe est trop élevée pour être due au hasard.

Méthode : on classe toutes les observations par ordre croissant. On construit un compteur démarrant à 1, et qui augmente d'une unité chaque fois que l'on change de groupe en parcourant la liste ordonnée. On obtient ainsi le nombre de "runs" u.

Exemple : On a fait passer une épreuve à 31 sujets, 14 hommes et 17 femmes. Le protocole des rangs observé est le suivant :

Hommes : 1 2 3 7 8 9 10 13 14 15 23 24 26 27
Femmes : 4 5 6 11 12 16 17 18 19 20 21 22 25 28 29 30 31

Détermination du nombre de "runs" :

```
MMM FFF MMMM FF MMM FFFFFFF MM F MM FFFF
111 222 3333 44 555 6666666 77 8 99 0000
```

Ici : $u = 10$.

Soit n_1 et n_2 les effectifs des deux groupes.

Pour $n_1 \leq 10$ ou $n_2 \leq 10$, on utilise des tables spécialisées.

Pour $n_1 > 10$ et $n_2 > 10$, on utilise l'approximation par une loi normale :

$$\mu = \frac{2n_1n_2}{n_1+n_2} + 1 \quad \sigma^2 = \frac{2n_1n_2(2n_1n_2 - n_1 - n_2)}{(n_1+n_2)^2(n_1+n_2-1)}$$

$$Z = \frac{u - \mu \pm 0.5}{\sigma}$$

N.B. ± 0.5 est une correction de continuité. Le signe doit être choisi de façon diminuer la valeur de $|Z|$.

Ici : $\mu = 16.35$ $\sigma^2 = 7.35$ $Z = -2.16$

Remarque : Ce test suppose l'absence d'ex aequo.

Test U de Mann-Whitney - Test de Wilcoxon Mann Whitney

Soient θ_1 et θ_2 les médianes de la variable dépendante dans les populations parentes.

H_0 : $\theta_1 = \theta_2$
H_1 : $\theta_1 \neq \theta_2$ (hypothèse bilatérale),
$\theta_1 < \theta_2$ ou $\theta_1 > \theta_2$ (hypothèses unilatérales)

Méthode : On construit le protocole des rangs pour l'ensemble des (n_1+n_2) observations (avec la convention du rang moyen pour les ex aequo).

W_1 : somme des rangs du premier échantillon
W_2 : somme des rangs du deuxième échantillon.

Pour $n_1 \leq 10$ ou $n_2 \leq 10$, on utilise des tables spécialisées.

Si $n_1 > 10$ et $n_2 > 10$, ou si l'un des deux effectifs est supérieur à 12, on utilise l'approximation par une loi normale :

Test U de Mann-Whitney proprement dit (cf. Statistica) :
On calcule :

$$U_1 = n_1n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - W_1$$

$$U_2 = n_1n_2 + \frac{n_2(n_2+1)}{2} - W_2$$

$$U = \min(U_1, U_2)$$

$$Z = \frac{U - \frac{n_1n_2}{2}}{E} \quad \text{avec} \quad E^2 = \frac{n_1n_2(n_1+n_2+1)}{12}$$

Variante : On calcule les rangs moyens dans les deux groupes $\overline{R_1}$ et $\overline{R_2}$ puis la statistique :

$$Z = \frac{\overline{R_1} - \overline{R_2}}{E} \text{ avec } E^2 = \frac{(n_1+n_2+1)(n_1+n_2)^2}{12n_1n_2}$$

Remarques.

1. Dans le test de Mann-Whitney, la variable X est supposée continue. La probabilité d'observer des ex aequo est donc *en théorie* nulle. Cependant, certains auteurs ont proposé des formules correctives pour tenir compte des ex aequo. Pour de grands échantillons, la correction proposée revient à multiplier la statistique précédente par $\frac{s}{s'}$ où s est l'écart type de la série $(1, 2, \ldots, n_1+n_2)$ et s' l'écart type des rangs réels. L'effet de la correction est en général peu important.

2. Certains auteurs proposent une formule comportant une correction de continuité.

3. Un test analogue : le test de permutation des rangs de Wilcoxon.

4. Le test de Mann Whitney permet notamment de tester l'égalité des médianes, *à condition que les variances des distributions soient égales*. Un autre test (test des rangs robuste) permet de s'affranchir de cette dernière condition.

Tests non paramétriques sur k groupes indépendants

Situation envisagée : un plan $\mathcal{S} < \mathcal{A}_k >$ avec un facteur $\mathcal{A}$ à k niveaux définissant k groupes indépendants et une variable dépendante X ordinale ou numérique

Effectifs des groupes : $n_1, n_2, \ldots, n_k$.

Test de la médiane

Le test de la médiane peut encore être utilisé dans cette situation.

Test de Kruskal-Wallis

Soient $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ les médianes de la variable dépendante dans les populations parentes.

H_0 : $\theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_k$
H_1 : Les médianes ne sont pas toutes égales.

Méthode : On construit le protocole des rangs pour l'ensemble des observations.

Soit $\overline{R}_j$ la moyenne des rangs dans le groupe j, N le nombre total d'observations et $\overline{R} = \frac{N+1}{2}$ le rang moyen général.

Statistique de test :

$$K = \frac{12}{N(N+1)} \sum n_j(\overline{R}_j - \overline{R})^2$$

ou

$$K = \left[\frac{12}{N(N+1)} \sum n_j\overline{R}_j^2\right] - 3(N+1)$$

Si le nombre de groupes est supérieur à 3 et le nombre d'observations dans chaque groupe est supérieur à 5, K suit approximativement une loi du χ^2 à $(k-1)ddl$.

Remarques :

1. Si le nombre de groupes est égal à 2, la statistique K est le carré de la statistique Z du test de Wilcoxon Mann et Whitney. Pour de grands échantillons et des tests bilatéraux, les deux tests sont donc équivalents.

2. Comme dans le cas précédent, le test concerne en principe des situations sans ex aequo. La correction proposée pour tenir compte des ex aequo revient à multiplier la statistique K précédente par $\frac{s^2}{s'^2}$ où s^2 est la variance de la série $(1, 2, \ldots, N)$ et s'^2 la variance des rangs réels. L'effet de la correction est en général peu important.

Test post hoc de comparaisons par paires

Dans le cas où le test de Kruskal-Wallis conclut à une différence significative entre les groupes, on peut compléter l'étude en réalisant des tests de comparaisons par paires. Plusieurs tests post hoc ont été proposés. Détaillons le test (analogue à celui de Bonferroni-Dunn) qui est disponible dans Statistica.

Pour comparer le groupe a et le groupe b, on calcule :

$$Z = \frac{\overline{R_a} - \overline{R_b}}{E_{ab}} \text{ avec } E_{ab}^2 = \frac{N(N+1)}{12}\left(\frac{1}{n_a} + \frac{1}{n_b}\right)$$

où N désigne l'effectif total des k groupes et où les rangs moyens $\overline{R_a}$ et $\overline{R_b}$ sont calculés en considérant le protocole des rangs sur l'ensemble des k groupes. La loi suivie est la loi normale.

Pour énoncer un résultat au seuil global (*familywise*) α_{FW}, chaque test individuel est réalisé au seuil $\alpha_{PC} = \frac{\alpha_{FW}}{c}$ avec $c = \frac{k(k-1)}{2}$ (nombre de comparaisons).

Exemple : 12 sujets soumis à 3 conditions différentes. On fait l'hypothèse que les sujets du 3è groupe auront un score significativement supérieur.

Valeurs observées de la variable dépendante :

G_1	G_2	G_3
.994	.795	.940
.872	.884	.979
.349	.816	.949
	.981	.890
		.978

Protocole des rangs et calcul des rangs moyens :

	G_1	G_2	G_3
	12	2	7
	4	5	10
	1	3	8
		11	6
			9
R_j	17	21	40
$\overline{R_j}$	5.67	5.25	8

On obtient ici :

$$K = \frac{12}{12 \times 13}\left[3(5.67)^2 + 4(5.25)^2 + 5(8)^2\right] - 3(12+1)$$

c'est-à-dire $K = 1.51$. Pour $\alpha = 5\%$, la table donne : $K_{crit} = 5.63$. On retient donc H_0.

Exemple de test post hoc (ici inutile, car on a conclu sur H_0) :
Pour un résultat au seuil de 5%, on considère la valeur critique de la loi normale correspondant à $\alpha = 1.67\%$, c'est-à-dire : $Z_c = 2.39$.
G_2 v/s G_3 : $E^2 = 13(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}) = 5.85$ d'où $E = 2.42$ et $Z = \frac{8-5.25}{2.42} = 1.14$. Différence non significative.

Tests non paramétriques sur 2 groupes appariés

Situation envisagée : un plan $\mathcal{S} * \mathcal{A}_2$ avec un facteur $\mathcal{A}$ à 2 niveaux définissant deux groupes appariés et une variable dépendante X ordinale ou numérique.

Effectif de l'échantillon de sujets : n.

Test du χ^2 de Mac Nemar

Il s'applique au cas où la variable X est dichotomique.

Situation générale :

		A_1	
		$X=1$	$X=0$
A_2	$X=1$	a	c
	$X=0$	b	d

Les paires discordantes sont les observations ($X = 1$ en A_1, $X = 0$ en A_2) et ($X = 0$ en A_1, $X = 1$ en A_2) L'information utile est alors fournie par les effectifs "de discordance" b et c.

Notations
p_1 : fréquence de la combinaison ($X = 1$ en A_1, $X = 0$ en A_2) par rapport à la discordance totale dans la population.
p_2 : fréquence de la combinaison ($X = 0$ en A_1, $X = 1$ en A_2) par rapport à la discordance totale dans la population.

Hypothèses du test
$H_0 : p_1 = p_2 (= 50\%)$
$H_1 : p_1 \neq p_2$

Statistique de test

$$\chi^2 = \frac{(b-c)^2}{b+c}, \quad ddl = 1$$

ou, avec la correction de Yates (petits effectifs) :

$$\chi^2 = \frac{(|b-c|-1)^2}{b+c}, \quad ddl = 1$$

Condition d'application : $b + c > 10$.

Remarques.

1. Cette statistique est la distance du χ^2 calculée entre le tableau d'effectifs observés et le tableau d'effectifs théoriques suivant :

		A_1	
		$X=1$	$X=0$
A_2	$X=1$	a	$\frac{b+c}{2}$
	$X=0$	$\frac{b+c}{2}$	d

2. On peut aussi utiliser la statistique suivante, qui permet éventuellement un test unilatéral :

$$Z = \frac{b - c \pm 1}{\sqrt{b+c}}$$

Z suit la loi normale centrée réduite.
Correction de continuité (± 1) : choisir le signe de façon à diminuer la valeur absolue de la statistique.

3. Sous la forme indiquée dans la remarque 2, il s'agit en fait d'un test des signes sur les protocoles 0-0, 0-1, 1-0, 1-1.

Tests des permutations

Principe : on observe un protocole de différences individuelles d_i. On observe D_+ différences positives et D_- différences négatives, soit $N = D_+ + D_-$ différences non nulles. On élimine les différences nulles.

On imagine tous les protocoles obtenus en affectant arbitrairement le signe "+" ou le signe "−" aux différences absolues $|d_i|$. Les 2^N protocoles ainsi obtenus sont supposés équiprobables.

Pour chaque protocole, on calcule $\sum d_i$. La zone d'acceptation de H_0 est formée des protocoles conduisant à des sommes $\sum d_i$ "proches de 0". La zone de rejet est formée des protocoles conduisant à des valeurs "extrêmes", positives et/ou négatives.

Deux tests basés sur ce principe :
• test des signes : les d_i sont codées +1 ou −1
• test de Wilcoxon : les d_i sont les rangs signés.

Test des signes

Un échantillon de sujets, placés dans deux conditions expérimentales différentes : groupes appariés.

Variable dépendante : ordinale ou numérique.

– protocole du signe des différences individuelles ; modalités : −1, 0, 1
– on élimine les différences nulles

D_+ : nombre de différences positives
D_- : nombre de différences négatives
$N = D_+ + D_-$: nombre total d'observations après élimination des différences nulles.

Hypothèses du test :

H_0 : les différences sont dues au hasard : dans la population parente, la fréquence des différences positives est 50%.

H_1 : Cette fréquence n'est pas 50% (test bilatéral)
ou (tests unilatéraux)
Cette fréquence est inférieure à 50%
Cette fréquence est supérieure à 50%

• *Cas des petits échantillons*

Sous H_0, D_+ suit une *loi binomiale* de paramètres N et $p = 0.5$.

On raisonne en termes de "niveau de significativité".

Par exemple, dans le cas d'un test unilatéral tel que
H_1 : fréquence inférieure à 50%
on calcule la fréquence cumulée $P(X \leq D_+)$ de D_+ pour la loi binomiale $B(N, 0.5)$.
Pour un seuil α donné :
Si $P(X \leq D_+) < \alpha$ on retient H_1
Si $P(X \leq D_+) \geq \alpha$ on retient H_0

• *Cas des grands échantillons : approximation par une loi normale*

$$Z = \frac{2D_+ \pm 1 - N}{\sqrt{N}}$$

Z suit une loi normale centrée réduite.

Correction de continuité (±1) : choisir le signe de façon à diminuer la valeur absolue de la statistique.

Test de Wilcoxon sur des groupes appariés
Test T, ou test des rangs signés

C'est le test des permutations appliqué au protocole des rangs signés.

Un échantillon de sujets, placés dans deux conditions expérimentales différentes : groupes appariés.
Variable dépendante : numérique.

Soit θ la médiane des différences individuelles dans la population parente.

On construit :

– le protocole des effets individuels d_i
– le protocole des valeurs absolues de ces effets $|d_i|$
– le protocole des rangs appliqués aux valeurs absolues, en éliminant les valeurs nulles.

T_+ : somme des rangs des observations tq $d_i > 0$
T_- : somme des rangs des observations tq $d_i < 0$
N = nombre de différences non nulles
$T_m = \min(T_+, T_-)$;
$T_M = \max(T_+, T_-)$

Hypothèses

H_0 : $\theta = 0$
H_1 : $\theta \neq 0$ (hypothèse bilatérale),
$\theta < 0$ ou $\theta > 0$ (hypothèses unilatérales)

• *Cas des petits échantillons*
$N \leq 15$ *: utilisation de tables spécialisées*

On compare T_m aux valeurs critiques indiquées par la table.

• *Cas des grands échantillons*
$N > 15$ *: approximation par une loi normale*

$$Z = \frac{T_+ \pm 0.5 - \frac{N(N+1)}{4}}{E}$$

avec

$$E^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{24}$$

N.B. ±0.5 est une correction de continuité. Le signe doit être choisi de façon diminuer la valeur de $|Z|$.

Sous H_0, Z suit une loi normale centrée réduite.

Remarques.
1. Ce test peut aussi servir à comparer une médiane à une valeur fixée à l'avance.
2. La variable X est supposée continue. La probabilité d'observer des ex aequo est donc *en théorie* nulle. Cependant, il existe une correction possible pour les ex aequo. Cette correction revient à multiplier la valeur Z précédente par $\sqrt{\frac{S}{S'}}$ où S est la somme des carrés des valeurs 1, 2, ..., N et S' est la somme des carrés des rangs réels.

Tests non paramétriques sur k groupes appariés

Situation envisagée : un plan $\mathcal{S} * \mathcal{A}_k$ avec un facteur $\mathcal{A}$ à k niveaux définissant des groupes appariés et une variable dépendante X ordinale ou numérique.

Effectif de l'échantillon de sujets : n.

Test Q de Cochran

Il s'applique au cas où la variable X est dichotomique. Par exemple : n sujets sont soumis aux k items d'un test. Résultats possibles : succès/échec. Les items ont-ils le même niveau de difficulté ?

H_0 : Dans la population, la probabilité de la modalité "1" est la même dans toutes les conditions : $\pi_1 = \pi_2 = \ldots = \pi_k$
H_1 : Dans la population, la probabilité de la modalité "1" n'est pas la même dans toutes les conditions.

Protocole observé :

Suj.	A_1	A_2	...	A_k	L_i	L_i^2
s_1	1	1	...	0	L_1	L_1^2
s_2	1	0	...	0	L_2	L_2^2
...						
s_n					L_n	L_n^2
G_j	G_1	G_2	...	G_k	G	

Notations :
L_i : somme sur la ligne i
G_j : somme sur la colonne j
G : somme des G_j avec $j = 1, 2, \ldots, k$
$\overline{G}$: moyenne des G_j

Statistique :

$$Q = \frac{(k-1)\left(k \sum G_j^2 - G^2\right)}{k \sum L_i - \sum L_i^2}$$

Calcul équivalent :

$$Q = \frac{k(k-1)\sum (G_j - \overline{G})^2}{k \sum L_i - \sum L_i^2}$$

Loi suivie par Q :

On élimine les lignes composées exclusivement de "0" ou exclusivement de "1". Soit N le nombre de lignes restantes.
Si $N \geq 4$ et $Nk > 24$, Q suit approximativement une loi du χ^2 à $k-1$ ddl.

Exemple :

Trois ascensions tentées par 5 alpinistes. Les trois ascensions présentent-elles le même niveau de difficulté ?

Suj.	A_1	A_2	A_3	L_i	L_i^2
s_1	1	1	0	2	4
s_2	1	0	1	2	4
s_3	0	0	1	1	1
s_4	0	1	1	2	4
s_5	1	0	1	2	4
G_j	3	2	4	9	

$$Q = \frac{2\left[3\,(9+4+16) - 9^2\right]}{3 \times 9 - 17} = 1.2$$

Remarques

1. Lorsque $k = 2$, le test Q de Cochran est exactement le test du χ^2 de Mac Nemar, sans correction de Yates.

2. On ne trouve pas couramment de tables du test Q de Cochran pour les petites valeurs de N et k. En effet, les valeurs critiques dépendent alors non seulement de N et k, mais aussi de la "signature" correspondant à l'échantillon observé. c'est-à-dire du nombre de lignes ayant pour somme 1, 2, ..., $k-1$.

3. Tests post hoc de comparaison par paires

Lorsque le test de Cochran conclut sur H_1, on peut utiliser un test analogue à celui de Bonferroni Dunn pour faire des comparaisons par paires entre les différentes conditions.

Pour comparer la condition a et la condition b, on calcule :

$$Z = \frac{p_a - p_b}{E}$$

où p_a et p_b sont les proportions de "1" dans chacune des conditions et où E est calculée par :

$$E^2 = 2\,\frac{k \sum L_i - \sum L_i^2}{n^2 k(k-1)}$$

La loi suivie est une loi normale.

Pour énoncer un résultat au seuil global (*familywise*) α_{FW}, chaque test individuel est réalisé au seuil $\alpha_{PC} = \frac{\alpha_{FW}}{c}$ avec $c = \frac{k(k-1)}{2}$ (nombre de comparaisons).

Analyse de variance à deux facteurs par les rangs de Friedman

Ce test s'applique au cas où la variable X est ordinale ou numérique.

H_0 : Dans les différentes conditions, les médianes sont égales : $M_1 = M_2 = \ldots = M_k$.
H_1 : Les k médianes ne sont pas toutes égales.

Statistique de test :

On calcule un protocole de rangs *par sujet*.

Notations :

n : nombre de sujets
k : nombre de conditions
R_j : somme des rangs de la colonne j (dans la condition A_j).

La statistique de Friedman est donnée par :

$$F_r = \left[\frac{12}{nk(k+1)} \sum R_j^2\right] - 3n(k+1)$$

ou, de manière équivalente :

$$F_r = \frac{12}{nk(k+1)} \sum \left(R_j - \frac{n(k+1)}{2}\right)^2$$

F_r est tabulée pour les petites valeurs de n et k. Au delà, F_r suit approximativement une loi du χ^2 à $(k-1)$ ddl.

Exemple :

Trois individus statistiques (groupes de sujets) sont soumis à 4 conditions. Y a-t-il une différence significative entre les 4 conditions ?

Protocole observé :

Ind.	Conditions I	II	III	IV
i_1	9	4	1	7
i_2	6	5	2	8
i_3	9	1	2	6

Protocole des rangs par individu statistique :

Ind.	Conditions I	II	III	IV
i_1	4	2	1	3
i_2	3	2	1	4
i_3	4	1	2	3
R_j	11	5	4	10

$$F_r = \frac{12}{3 \times 4 \times (4+1)} \left(11^2 + 5^2 + 4^2 + 10^2\right) - 3\times3\times(4+1)$$

D'où : $F_r = 7.4$

Lecture de la table : Au seuil de 5%, $F_{r,crit} = 7.4$. Il est difficile de conclure sur H_0 ou H_1.

Remarques.

1. Correction possible pour les ex aequo. Elle consiste à remplacer la somme des variances "théoriques" des lignes $n\frac{k(k+1)}{12}$ par la somme de leurs variances réelles. Des logiciels tels que Statistica ou R intègrent cette correction, qui peut être importante si le nombre de conditions est petit et le nombre d'ex aequo élevé.

2. Avec la correction pour les ex aequo, le test de Friedman est équivalent avec le test Q de Cochran dans le cas d'une variable dichotomique, et à l'approximation normale du test des signes si le nombre de conditions est 2 (k=2). Le test de Friedman apparaît donc comme une extension du test du signe. Il s'agit d'un test relativement peu puissant.

3. Test post hoc de comparaison par paires

Lorsque le test de Friedman conclut sur H_1, on peut utiliser un test analogue à celui de Bonferroni Dunn pour faire des comparaisons par paires entre les différentes conditions.

Pour comparer la condition a et la condition b, on calcule (en l'absence d'ex aequo) :

$$Z = \frac{R_a - R_b}{E} \quad \text{avec} \quad E^2 = \frac{nk(k+1)}{6}$$

La loi suivie est une loi normale.

Pour énoncer un résultat au seuil global (*familywise*) α_{FW}, chaque test individuel est réalisé au seuil $\alpha_{PC} = \frac{\alpha_{FW}}{c}$ avec $c = \frac{k(k-1)}{2}$ (nombre de comparaisons).

Corrélation et régression linéaires

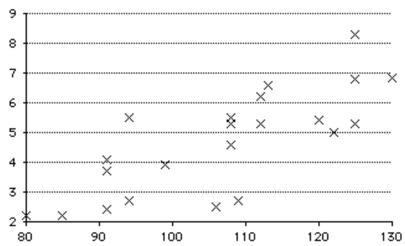
Corrélation linéaire

Situation envisagée : un échantillon de sujets, deux variables numériques observées (ou une variable observée dans deux conditions).

Données :

	X	Y
s_1	x_1	y_1
s_2	x_2	y_2
...	...	...

Nuage de points : points (x_i, y_i)



Covariance des variables X et Y

$$Cov(X,Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$$

ou

$$Cov(X,Y) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - \overline{x}\ \overline{y}$$

Covariance corrigée des variables X et Y

$$Cov_c(X,Y) = \frac{n}{n-1}\ Cov(X,Y)$$

Coefficient de corrélation de Bravais Pearson

On désigne par $s(X)$ et $s(Y)$ les écarts types de X et Y et par $s_c(X)$, $s_c(Y)$ leurs écarts types corrigés.

$$r = \frac{Cov(X,Y)}{s(X)s(Y)} = \frac{Cov_c(X,Y)}{s_c(X)s_c(Y)}$$

Remarques

- r n'est pas une estimation correcte du coefficient de corrélation dans la population. Certains logiciels de statistiques donnent comme estimation :

$$r_{aj} = \sqrt{1 - \frac{(1-r^2)(N-1)}{N-2}}$$

- Il existe des relations non linéaires
- Corrélation n'est pas causalité