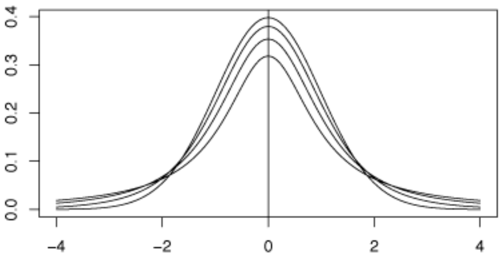
Loi de Student



Densité de la loi de Student pour ddl=1, ddl=2, ddl=5 et ddl=100

Cas particulier : Ecart type σ connu

Si la variable X est distribuée selon une loi normale dans la population parente, et si on connaît son écart type σ, la statistique à utiliser est :

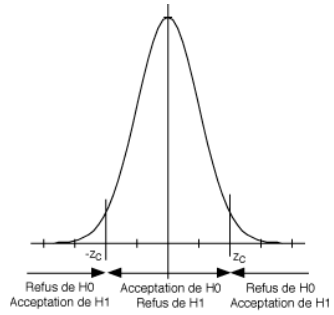
$$Z = \frac{\overline{x} - \mu_0}{E} \; avec \; E^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Z suit alors une loi normale, même si $n \leq 30$.

Exemple : test de QI sur un échantillon.

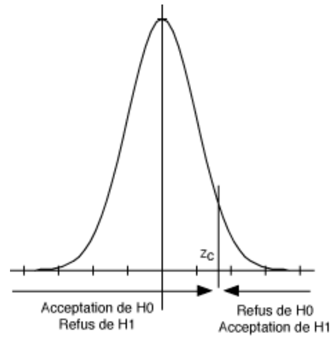
Détermination de la règle de décision selon la forme de H_1

- Test bilatéral. H_1 : $\mu \neq \mu_0$



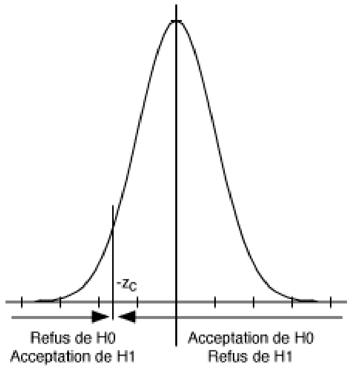
z_c définie par $P(-z_c \leq Z \leq z_c) = 1 - \alpha$

- Test unilatéral. H_1 : $\mu > \mu_0$



z_c définie par $P(Z \leq z_c) = 1 - \alpha$

- Test unilatéral. H_1 : $\mu < \mu_0$



z_c définie par $P(Z \leq z_c) = 1 - \alpha$

Remarque : raisonner en termes de niveau de significativité

Comment interpréter les résultats fournis par les logiciels ?

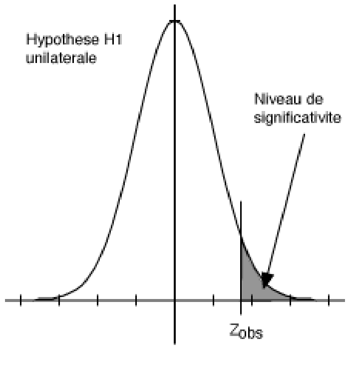
Niveau de significativité (NivSig ou p) : probabilité d'obtenir, sous H_0, une valeur de la statistique de test "au moins aussi extrême" que la valeur observée.

Pour un test unilatéral "à droite" :
$p = P(Z > z_{obs})$

Pour un test unilatéral "à gauche" :
$p = P(Z < z_{obs})$

Pour un test bilatéral :
$p = P(|Z| > |z_{obs}|)$

Exemple pour une hypothèse H_1 unilatérale "à droite" :



Règle :

Soit α le seuil et p le niveau de significativité.

– Si $p < \alpha$, on accepte H_1, et on refuse H_0 au seuil choisi

– Si $p \geq \alpha$, on refuse H_1, et on accepte H_0 au seuil choisi

Test de comparaison d'une proportion à une norme

Notations

X : variable dichotomique définie sur une population
p_0 : fréquence (connue) de la modalité "1" sur la population de référence

f : fréquence observée sur un échantillon
n : taille de l'échantillon.

On introduit p : fréquence (inconnue) de la modalité "1" sur la population d'où est tiré l'échantillon.

Hypothèses du test

$H_0 : p = p_0$

H_1 : A choisir parmi : $p \neq p_0$ ou $p < p_0$ ou $p > p_0$

Statistique de test.
Grands échantillons : $np_0 \geq 15$ et $n(1 - p_0) \geq 15$

$$Z = \frac{f - p_0}{E} \; avec \; E^2 = \frac{p_0(1 - p_0)}{n}$$

Z suit la loi normale centrée réduite.

Tests de comparaison de moyennes

Comparaison de deux moyennes. Groupes appariés

Expérience menée selon un plan $\mathcal{S}_n * \mathcal{A}_2$.

On introduit le protocole dérivé des différences individuelles.

Notations
μ_1, μ_2 : moyennes respectives des deux variables étudiées

δ : moyenne des différences individuelles sur la population ($\delta = \mu_1 - \mu_2$) (distribution normale)

n : taille de l'échantillon

$\overline{x_1}, \overline{x_2}$: moyennes respectives des deux variables sur un échantillon de taille n

$\overline{d}$: moyenne des différences individuelles sur un échantillon de taille n ($\overline{d} = \overline{x_1} - \overline{x_2}$)

s_c : écart type corrigé estimant l'écart type des différences individuelles sur la population parente

Hypothèses du test

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$, c'est-à-dire $\delta = 0$

H_1 : A choisir parmi : $\mu_1 \neq \mu_2$ ou $\mu_1 < \mu_2$ ou $\mu_1 > \mu_2$

Statistique de test. Cas où $n > 30$

$$Z = \frac{\overline{d}}{E} \; avec \; E^2 = \frac{s_c^2}{n}$$

Sous H_0, Z suit la loi normale centrée réduite.

Statistique de test. Cas où $n \leq 30$

$$T = \frac{\overline{d}}{E} \; avec \; E^2 = \frac{s_c^2}{n}$$

Sous H_0, T suit la loi de Student à $n - 1$ ddl.

Exemple :

Temps de réaction de 10 sujets mesuré à jeun ($\overline{x_1} = 22.3$ms) et sous l'influence d'un tranquilisant ($\overline{x_2} = 31.7$ms). Ecart type corrigé de la série des différences : $s_c = 11.54$.

$H_0 : \delta = 0$
$H_1 : \delta \neq 0$ (test bilatéral, par exemple).

La statistique de test T suit une loi de Student, et, pour un seuil de 5%, la valeur critique est : $t_{crit} = 2.26$.

Or, $E^2 = \frac{11.54^2}{10}$, $E = 3.65$,
$t_{obs} = \frac{22.3 - 31.7}{3.65} = -2.58$

On conclut donc sur H_1.

Construire la règle de décision dans le cas d'un test unilatéral

Dans le cas d'un test unilatéral, la zone de rejet de H_0 ne comprend qu'une seule des deux queues de la distribution. Mais est-elle située à droite ou à gauche ?

Pour lever l'ambiguïté, on peut, avant tout calcul, étudier la *consistance des observations avec l'hypothèse* H_1.

Exemple 1. On a posé les hypothèses d'un test de la façon suivante :
$H_0 : \mu_1 = \mu_2$
$H_1 : \mu_1 < \mu_2$ (test unilatéral)

On a observé sur les échantillons tirés : $\overline{x_1} = 12.5$ et $\overline{x_2} = 11.4$.

On constate que $\overline{x_1} > \overline{x_2}$ alors que H_1 est : $\mu_1 < \mu_2$.

Dans ce cas, les observations ne sont pas consistantes avec H_1 ; il est inutile de poursuivre le test. *L'estimation ponctuelle suffit à conclure sur H_0.*

Exemple 2. On a posé les hypothèses d'un test de la façon suivante :
$H_0 : \mu_1 = \mu_2$
$H_1 : \mu_1 < \mu_2$ (test unilatéral)

On a observé sur les échantillons tirés : $\overline{x_1} = 32.4$ et $\overline{x_2} = 44.7$.

On constate que $\overline{x_1} < \overline{x_2}$ et que H_1 est : $\mu_1 < \mu_2$.

Dans ce cas, les observations sont consistantes avec H_1. Il faut poursuivre le test. La valeur critique et la valeur observée de la statistique seront soit positives, soit négatives, selon le sens choisi pour calculer les différences. Mais toutes deux se situeront *dans la même queue de la distribution.*

**Comparaison de deux moyennes.
Groupes indépendants**

Expérience menée selon un plan $\mathcal{S}_n < \mathcal{A}_2 >$

Notations
μ_1, μ_2 : moyennes sur les populations parentes respectives (distributions normales de même variance)

n_1, n_2 : tailles respectives des échantillons

$\overline{x_1}, \overline{x_2}$: moyennes respectives sur des échantillons de tailles n_1 et n_2

s_1, s_2 : écarts types des deux échantillons.

s_{1c}, s_{2c} : écarts types corrigés estimés à partir des échantillons.

Hypothèses du test

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$

H_1 : A choisir parmi : $\mu_1 \neq \mu_2$ ou $\mu_1 < \mu_2$ ou $\mu_1 > \mu_2$

Statistique de test.

Grands échantillons
Cas où $n_1 > 30$ et $n_2 > 30$

$$Z = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{E} \; avec \; E^2 = \frac{s_{1c}^2}{n_1} + \frac{s_{2c}^2}{n_2}$$

Sous H_0, Z suit la loi normale centrée réduite.

Petits échantillons
Cas où $n_1 \leq 30$ ou $n_2 \leq 30$

Groupes équilibrés : $n_1 = n_2 (= n)$

$$T = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{E} \; avec \; E^2 = \frac{s_{1c}^2 + s_{2c}^2}{n}$$

Sous H_0, T suit la loi de Student à $2(n-1)$ ddl.

Petits échantillons - cas général :

$$T = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{E} \; avec \; E^2 = \frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)$$

T suit la loi de Student à $n_1 + n_2 - 2$ ddl.

Exemple :

Un groupe de 30 adultes jeunes, et un groupe de 30 adultes âgés. On soumet les sujets des deux groupes à une épreuve de fluence orthographique. Les paramètres calculés à partir des résultats observés sont les suivants :

	Fluence orthographique	
	Jeunes	Agés
n	30	30
$\overline{x}$	11.4	11.0
s_c	3.1	3.2

H_0 : $\mu_1 = \mu_2$
H_1 : $\mu_1 \neq \mu_2$ (on fait ici un test bilatéral).

La statistique de test suit une loi de Student à $30 + 30 - 2 = 58$ ddl.

Pour un seuil de 5%, la valeur critique déduite de la table est $t_c = 2.0017$. La règle de décision est donc :

– si $-2.0017 \leq t_{obs} \leq 2.0017$, on retient H_0.
– si $t_{obs} < -2.0017$ ou $t_{obs} > 2.0017$, on rejette H_0 et on retient H_1.

Or : $E^2 = \dfrac{3.1^2}{30} + \dfrac{3.2^2}{30} = 0.6617$ d'où $E = 0.81$ et $t_{obs} = \dfrac{11.4 - 11.0}{0.81} = 0.4917$.

On retient donc l'hypothèse H_0 : on n'a pas mis en évidence de différence significative de la fluence verbale.

**Comparaison de deux proportions.
Groupes indépendants**

Notations

p_1, p_2 : proportions dans les populations parentes respectives
n_1, n_2 : tailles respectives des échantillons
f_1, f_2 : proportions respectives dans des échantillons de tailles n_1 et n_2

Hypothèses du test
$H_0 : p_1 = p_2$
H_1 : choisir entre : $p_1 \neq p_2$ ou $p_1 < p_2$ ou $p_1 > p_2$

Statistique de test

$$Z = \frac{f_1 - f_2}{E} \; avec$$

$$E^2 = p(1-p)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) \; et \; p = \frac{n_1 f_1 + n_2 f_2}{n_1 + n_2}$$

Si $n_1 > 30$, $n_2 > 30$ et p "ni trop grand, ni trop petit" ($np \geq 15$ et $n(1-p) \geq 15$), alors, sous H_0, Z suit la loi normale centrée réduite.

Exemple

Variable *sexe* : deux groupes indépendants
Variable dépendante observée : succès/échec à une épreuve

Résultats

	M	F	Ensemble
Succès	150	120	270
Echec	90	40	130
Total	240	160	400

Calculs

$f_1 = 62,5\%$, $f_2 = 75\%$

$p = 67,5\%$, $n_1 = 240$, $n_2 = 160$

$z_{obs} = -2.615$

Pour un test bilatéral, $z_{crit} = 1.96$

Remarque

Le tableau ci-dessus peut être vu comme un tableau de contingence. Cette situation peut aussi être étudiée à l'aide du test du χ^2, qui sera étudié plus loin.

Comparaison de deux proportions. Groupes appariés

Deux groupes appariés : la même variable dichotomique a été utilisée pour tester un groupe de sujets dans deux conditions A_1 et A_2.
Résultats résumés par le tableau de contingence :

		A_1	
		Réussite	Echec
A_2	Réussite	a	c
	Echec	b	d

L'information utile est alors fournie par les effectifs "de discordance" b et c.

Notations
p_1 : fréquence de la combinaison (réussite en A_1, échec en A_2) par rapport à la discordance totale dans la population.
p_2 : fréquence de la combinaison (échec en A_1, réussite en A_2) par rapport à la discordance totale dans la population.

Hypothèses du test
$H_0 : p_1 = p_2 (= 50\%)$
H_1 : choisir entre : $p_1 \neq p_2$ ou $p_1 < p_2$ ou $p_1 > p_2$

Statistique de test

$$Z = \frac{b - c}{\sqrt{b + c}}$$

Si $b + c > 30$, sous H_0, Z suit la loi normale centrée réduite.

Pour un test bilatéral, on peut aussi utiliser comme statistique de test le χ^2 de Mac Nemar :

$$\chi^2 = \frac{(b - c)^2}{b + c}, \quad ddl = 1$$

ou, avec la correction de Yates (petits effectifs) :

$$\chi^2 = \frac{(|b - c| - 1)^2}{b + c}, \quad ddl = 1$$

Exemple

Test de la mémoire à 2 semaines et à un an.

		2 semaines		
		Reconnu	Non reconnu	Total
Un an	Reconnu	81	8	89
	Non reconnu	46	49	95
	Total	127	57	184

$$z_{obs} = \frac{46 - 8}{\sqrt{46 + 8}} = 5.17$$

Pour un test unilatéral (Reconnaissance à 1 an < Reconnaissance à 2 semaines), $z_{crit} = 1.645$. La différence est significative.

Conclusion

Tests *paramétriques*

Conditions d'application ou hypothèses *a priori* sur les populations parentes

– Groupes indépendants : distributions normales de même variance pour la variable dépendante,

– Groupes appariés : distribution normale des effets individuels dans la population parente ou échantillon de grande taille

– Comparaison de fréquences : échantillons de taille suffisante et fréquence "ni trop grande, ni trop petite".

Il est généralement difficile de prouver que ces conditions sont respectées. Mais ces méthodes sont *robustes* et fournissent des résultats corrects même si les hypothèses ne sont qu'approximativement respectées.

Que fait-on quand elles ne le sont visiblement pas ?